Dreapta in spatiu - seminar

1) Scrieti ecuatiile dreptei care trece prin otigine si prin punctul A(a,b,c).

Raspuns: ecuatia vectoriala: $\bar{r} = t(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k})$, $t \in \mathbb{R}$; ecuatiile canonice: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$; ecuatiile generale: $bx - ay = 0$ si $cx - az = 0$, ecuatiile parametrice: $x = at, y = bt, z = ct$, $t \in \mathbb{R}$.

2) Scrieti ecuatiile dreptei ce trece prin punctele A(0,0,2) si B(4,0,5).

Raspuns: $\frac{x}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{3} \Rightarrow y = 0$ si $3x - 4z + 8 = 0$.

3) Verificati daca urmatoarele trei puncte sunt coliniare: A(3,0,1), B(0,2,4), C(1,4/3,3).

Raspuns: Coordonatele punctului C verifica ecuatiile dreptei AB: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$, deci $C \in AB$.

4) Determinati unghiul dreptelor $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2}$ si $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}$.

Raspuns: unghiul dreptelor este unghiul dintre vectorii directori ai acestora, deci $\cos\phi = \frac{72}{77}$.

5) Sa se determine ecuatiile canonice ale dreptei: $\begin{aligned} 2x - 3y - 3z - 9 &= 0, \\ x - 2y + z + 3 &= 0. \end{aligned}$

Raspuns: Rezolvand sistemul obtinem ecuatiile parametrice $\begin{aligned} x &= 9t, \\ y &= 5t, \\ z &= 3t + 1, \end{aligned}$ si de aici imediat ecuatiile canonice $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{z-1}{3}$.

6) Sa se scrie ecuatiile dreptei care trece prin punctul A(2,-5,3) si este:

a) paralela cu axa z;

b) paralel cu dreapta $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z+3}{9}$;

c) paralela cu dreapta $\begin{aligned} 2x - y + 3z + 1 &= 0, \\ 5x + 4y - z - 7 &= 0. \end{aligned}$

Raspuns: a) $\begin{aligned} x - 2 &= 0, \\ y + 5 &= 0; \end{aligned}$ b) $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{-6} = \frac{z-3}{9}$; c) $\frac{x-2}{-11} = \frac{y+5}{17} = \frac{z-3}{13}$.

7) Determinati pozitia relativa a urmatoarelor perechi de drepte:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ si $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$;

b) $\frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$ si $\frac{x}{-2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-\frac{1}{2}}$.

Raspuns: a) Fie A(2,0,-1) si $\bar{a}(2,3,1)$ elementele ce determina prima dreapta si B(0,1,0), $\bar{b}(3,2,-1)$ un punct respectiv un vector director al celei de a doua dreapta. Se verifica $(\overrightarrow{AB}, \bar{a}, \bar{b}) \neq 0$, deci cele doua drepte sunt necoplanare.

b) Se observa ca vectorii directori ai celor doua drepte sunt coliniari, deci dreptele sunt coplanare dar nu coincid (usor de verificat ca un punct al primei drepte nu apartine celei de a doua dreapta), deci dreptele sunt paralele.

8) Verificati daca urmatoarele drepte sunt concurente:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-5}{4}$ si $\frac{x-6}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$;

b) $\begin{array}{rl} 4x+z-1 & =0, \\ x-2y+3 & =0 \end{array}$ si $\begin{array}{rl} 3x+y-z+4 & =0, \\ y+2z-8 & =0. \end{array}$

Raspuns: Se verifica faptul ca cele doua drepte sunt coplanare si ca vetorii lor directori sunt necoliniari. Ambele perechi de drepte sunt concurente.

9) Scrieti ecuatiile perpendicularei coborate din A(2,3,1) pe dreapta (d) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

Raspuns: Metoda 1: Fie P piciorul acestei perpendiculare. Deoarece P$\in d$, rezulta ca P(2t-1,-t,3t+2). Se pune conditia ca vectorul $\overrightarrow{AP}$ sa fie perpendicular pe vectorul director al dreptei d si se determina t.

Metoda 2: piciorul perpendicularei din P pe d se obtine ca intersectia dintre dreapta d si planul prin A perpendicular pe d. Ecuatiile acestuia din urma se scriu usor folosind faptul ca se cunoaste un punct al sau si un vector normal lui, vectorul director al dreptei d.

Se obtine $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{-1}$.

10) Sa se scrie ecuatia perpendicularei coborate din origine pe dreapta $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$.

Raspuns: $\frac{x}{33} = \frac{y}{-26} = \frac{z}{27}$.

11) Scrieti ecuatiile unei drepte care trece prin punctul A(4,0,-1) si intersecteaza dreptele (d_1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$ si (d_2) $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$.

Raspuns: Fie B(2t+1,4t-3,3t+5) si C(5s,-s+2,2s-1) punctele de intersectie ale dreptei cautate cu (d_1) respectiv (d_2). Din conditia ca A, B, C sa fie coliniare se determina vectorul director al dreptei cautate si ecuatiile: $\frac{x-4}{13} = \frac{y}{37} = \frac{z+1}{58}$.

O alta metoda este de a observa ca dreapta cautata se obtine din intersectia planului care contine punctul A si dreapta (d_1) cu planul care contine pe A si dreapta (d_2).

12) Dintre toate dreptele care intersecteaza doua drepte (d_1) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$ si (d_2) $\frac{x-10}{5} = \frac{y+7}{4} = \frac{z}{1}$, sa se determine ecuatiile aceleia paralele cu dreapta (d) $\frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{1}$.

Raspuns: Folosind prima metoda din problema precedenta si impunand ca $\overrightarrow{BC}$ sa fie paralel cu vectorul director al dreptei (d), se obtin ecuatiile: $\frac{x}{8} = \frac{y+8}{7} = \frac{z+9}{1}$.

13) Scrieti ecuatiile dreptei care se afla in planul (xz), trece prin origine si este perpendiculara pe dreapta (d) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-5}{1}$.

Raspuns: Vectorul director al dreptei cautate este de tipul $m\bar{i}+p\bar{k}$ si verifica $< m\bar{i}+p\bar{k}, 3\bar{i}-2\bar{j}+\bar{k} >= 0$. Sau dreapta cautata este intersectia dintre planul y=0 si planul prin A, perpendicular pe (d). Se obtine $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-3}$, sau $\begin{aligned} 3x+z &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$

14) Scrieti ecuatiile perpendicularei comune a dreptelor (d_1) $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-9}{-1}$ si (d_2) $\frac{x-3}{-7}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Raspuns: Verificam initial ca cele doua drepte sunt necoplanare.

Metoda 1: Determinam picioarele perpendicularei comune folosind ecuatiile parametrice ale celor doua drepte si impunand ca vectorul director al dreptei cautate sa fie perpendicular pe ambii vectori directori ai celor doua drepte date.

Metoda 2: Perpendiculara comuna se obtine ca intersectia dintre doua plane π_1 si π_2, π_1 fiind planul proiector al dreptei (d_1) pe planul ce contine (d_2) si este paralel cu (d_1), iar π_2 este planul proiector al dreptei (d_2) pe planul ce contine (d_1) si este paralel cu (d_2). Se obtin ecuatiile: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{4}$.