Seminar 1

1. Verificaţi că următoarele mulţimi de numere împreună cu legea de compoziţie specificată formează grupuri abeliene:

   (a) $(\mathbb{Z},+),\ (\mathbb{Q},+),\ (\mathbb{R},+),\ (\mathbb{C},+)$;
   (b) $(\mathbb{Q}^*,\cdot),\ (\mathbb{R}^*,\cdot),\ (\mathbb{C}^*,\cdot)$;
   (c) $(\mathbb{Z},\star)$, unde $x\star y=x+y-2$, $\forall x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Considerăm următoarele mulţimi de matrice:

   (a) $Gl(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mid \det A\neq 0\}$ mulţimea matricelor nesingulare cu elemente numere complexe;
   (b) $O(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\mid A^tA={}^tAA=I_n\}=\{A\in Gl(n,\mathbb{C})\mid {}^tA=A^{-1}\}$ mulţimea matricelor (complex) ortogonale;
   (c) $SO(n,\mathbb{C})=\{A\in O(n,\mathbb{C})\mid \det A=1\}$;
   (d) $\mathcal{U}(n,\mathbb{C})=\{A\in Gl(n,\mathbb{C})\mid \bar{A}=A^*\}$ mulţimea matricelor (complex) unitare;
   (e) $S_p(n,\mathbb{C})=\{A\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})\mid {}^tAJA=J\}$, unde $J=\begin{pmatrix} O_n & I_n\\ -I_n & O_n\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Demonstraţi că fiecare din aceste mulţimi formează grup în raport cu operaţia de înmulţire a matricelor. Mai exact $O(n,\mathbb{C})$, $U(n,\mathbb{C})$ sunt subgrupuri ale grupului $GL(n,\mathbb{C})$ iar $SO(n,\mathbb{C})$ este subgrup al grupului $O(n,\mathbb{C})$. Ele se numesc:

- $Gl(n,\mathbb{C})$- *grupul liniar general complex de ordinul* n
- $O(n,\mathbb{C})$- *grupul ortogonal complex de ordinul* n
- $SO(n,\mathbb{C})$- *grupul ortogonal complex special de ordinul* n
- $\mathcal{U}(n,\mathbb{C})$- *grupul unitar (complex) de ordinul* n
- $S_p(n,\mathbb{C})$- *grupul simplectic complex de ordinul* n (este subgrup al lui $Gl(2n,\mathbb{C})$).

Obs: Evident putem defini $Gl(n,\mathbb{R})$, $O(n,\mathbb{R})$, $SO(n,\mathbb{R})$ şi $S_p(n,\mathbb{R})$. Acestea sunt subgrupuri ale grupurilor corespunzătoare de matrice cu elemente numere complexe.

3. Demonstrati ca $A\in SO(2,\mathbb{R})$ daca si numai daca $\exists\varphi\in[0,2\pi)$ astfel incat
$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$
$SO(2,\mathbb{R})$ se numeşte şi *grupul cuantic.*
Scrieţi şi matricele din $O(2,\mathbb{R})$ ce au determinantul -1 într-un mod analog. Precizaţi daca $\{A\in O(n,\mathbb{C})\mid \det A=-1\}$ este subgrup al grupului ortogonal.

4. Fie a şi b două drepte perpendiculare din planul π care se intersectează în punctul O. Considerăm s_a, s_b şi s_O simetriile ortogonale în raport cu a, b şi respectiv simetria de centru O. Demonstraţi că mulţimea $\mathcal{K}=\{Id_\pi,s_a,s_b,s_O\}$ formează un grup abelian în raport cu compunerea funcţiilor, numit *grupul lui Klein.*

5. Determinaţi toate subgrupurile grupului aditiv al numerelor întregi.

6. Care dintre următoarele mulţimi de numere formează inel, respectiv corp, în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmultire?
(a) $\mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R},\ \mathbb{C}$;
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$;
(c)$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$
(d) $\mathbb{Z}[X],\ \mathbb{Q}[X]$;
(e) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
(f) $\mathbb{Z}_6,\ \mathbb{Z}_{13}$.

7. Arătaţi că următoarea mulţime de matrice împreună cu operaţiile de adunare şi de înmultire a matricelor este corp
$$\left\{\begin{pmatrix} a & 3b\\ b & a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}.$$