Seminar 8

Cadrul de lucru: un plan vectorial euclidian orientat V^2.

1. In V^2 se considera baza ortonormata pozitiva $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$. Determinati unghiurile orientate dintre perechile ordonate de vectori $(\bar{u}, \bar{v})$ si $(\bar{v}, \bar{u})$ pentru a) $\bar{u} = \bar{i} + \sqrt{3}\bar{j}$, $\bar{v} = \sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}$; b) $\bar{u} = \bar{i} + \sqrt{2}\,\bar{j}$, $\bar{v} = \sqrt{2}\,\bar{i} - \bar{j}$.

2. In V^2 se considera rotatiile de unghi $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ si $\gamma = -\frac{\pi}{4}$. Scrieti matricile acestor rotatii in raport cu baza ortonormata pozitiva $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$. Observati ca rotatiile sunt aplicatii ortogonale de specia I. Reciproc, orice aplicatie ortogonala de specia I a lui V^2 este o rotatie. Determinati imaginile vectorilor $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{v} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overline{w} = 5\bar{i} - \bar{j}$ prin R_α, R_β, respectiv R_γ.

3. Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ o baza ortonormata pozitiva in V^2 si vectorul $\bar{a}$ astfel incat unghiul orientat dintre $\bar{i}$ si $\bar{a}$ este $\theta \in (-\pi, \pi]$. Demonstrati ca matricea simetriei ortogonale fata de $\bar{a}$, in raport cu baza B este
$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$
Deci $S_{\bar{a}}$ este o aplicatie ortogonala de specia a II-a. Reciproc, orice aplicatie ortogonala de specia a doua a lui V^2 pe V^2 poate fi conceputa ca o simetrie ortogonala fata de o dreapta vectoriala din V^2.

4. Fie $\bar{a}, \bar{b}$ doi vectori nenuli din V^2. Demonstrati ca $S_{\bar{a}} \circ S_{\bar{b}} = R_\alpha$, unde $\alpha = 2\widehat{(\bar{b}, \bar{a})}_o$. Reciproc, orice rotatie a lui V^2 este o compunere de doua simetrii ortogonale fata de vectori din V^2.

5. In V^2 se considera $\bar{a} \neq \bar{0}$ si $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Studiati ce reprezinta aplicatiile ortogonale $S_{\bar{a}} \circ R_\alpha$, $R_\alpha \circ S_{\bar{a}}$.

6. Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ o baza ortonormata pozitiva in V^2 si $B' = \{\bar{i'}, \bar{j'}\}$, $B'' = \{\bar{i''}, \bar{j''}\}$, unde $\bar{i'} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}\right)$, $\bar{j'} = \frac{1}{2}\left(-\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}\right)$, $\bar{i''} = \frac{1}{2}\left(\bar{i} - \sqrt{3}\,\bar{j}\right)$, $\bar{j''} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}\right)$.
   (a) a) Demonstrati ca B' este baza ortonormata ce se obtine din B printr-o rotatie de unghi ϕ care sa se determine. Exprimati coordonatele vectorului $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j}$ in raport cu baza B'.
   (b) Demonstrati ca B'' se obtine din B' printr-o rotatie al carei unghi sa se determine.

7. Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ baza ortonormata, pozitiva in V^2 si $\bar{u} = -3\bar{i} + \bar{j}$. Determinati unghiurile cu care trebuie rotita baza B astfel incat $\bar{u}$ sa fie coliniar cu a) primul vector al noii baze; b) al doilea vector al noii baze.

8. Fie $B = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ baza ortonormata, pozitiva in V^2. Determinati coordonatele vectorului $\overline{w} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ in bazele ortonormate obtinute din B respectiv prin rotatia de unghi $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$.

9. Intr-un plan orientat se considera $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ un reper ortonormat pozitiv, in raport cu care se dau punctele $A(-3, 1)$si $O'(2, 4)$. Determinati un reper ortonormat negativ $\mathcal{R}' = \left\{O'; \bar{i'}, \bar{j'}\right\}$ in raport cu care coordonatele lui A sunt $(-4\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

10. Fie $M(-\sqrt{3}, 1)$ in raport cu reperul ortonormat pozitiv $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. Acesta determina axele de coordonate Ox, Oy.
    (a) Determinati unghiul cu care trebuiesc rotite axele lui $\mathcal{R}$ astfel incat:
        i. M sa apartina noii axe a absciselor Ox';
        ii. M sa apartina noii axe a ordonatelor Oy'.
    (b) Reperul $\mathcal{R}$ este translatat in punctul $A(1, -1)$. Determinati coordonatele lui M in raport cu $\mathcal{R}'' = \{A; \bar{i}, \bar{j}\}$.

11. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$ cu lungimea laturii 2 care, raportat la un reper ortonormat pozitiv, cu axele xCy, are varfurile B si E pe Cx, respectiv Cy. Se considera un alt reper ortonormat pozitiv cu axele $x'Fy'$, semiaxa pozitiva a absciselor fiind $(FA$.

    (a) Scrieti formulele schimbariri de repere de la xCy la $x'Fy'$.

    (b) Determinati coordonatele varfurilor C si E fata de reperul $x'Fy'$.

12. In V^2 se considera un reper ortonormat pozitiv $\mathcal{R} = \{O; \bar{i}, \bar{j}\}$. In raport cu acesta se dau punctele $O_1(1,0)$, $O_2(0,1)$ si vectorii

$$\bar{u}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} + \bar{j}\right),\ \bar{u}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\bar{i} - \bar{j}\right),\ \bar{v}_1 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\,\bar{i} - \bar{j}\right),\ \bar{v}_2 = \frac{1}{2}\left(\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}\right).$$

    (a) Aratati ca $\mathcal{R}_1 = \{O_1; \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ si $\mathcal{R}_2 = \{O_2; \bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ sunt repere ortonormate.

    (b) Scrieti formulele schimbarilor de reper $\mathcal{R} \to \mathcal{R}_1$, $\mathcal{R} \to \mathcal{R}_2$ si $\mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$, indicand unghiurile orientate ce caracterizeaza schimbarea de baze.

    (c) Fie $P(1,1)$ in raport cu $\mathcal{R}_1$. Determinati coordonatele lui P in raport cu $\mathcal{R}_2$.