MINISTERUL EDUCAŢIEI , CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
UNIVERSITATEA “ALEXANDRU IOAN CUZA” IAŞI

Sinteza rezultatelor obţinute în anul 2014
în cadrul Proiectului PN-II-ID-PCE-2011-3-0154

PROPRIETĂŢI CALITATIVE ALE APLICAŢIEI SOLUŢIE ASOCIATE INCLUZIUNILOR DIFERENŢIALE

În cadrul prezentului proiect s-au desfăşurat activităţi de documentare şi informare, de cercetare şi elaborare de studii, prezentate la manifestări ştiinţifice naţionale şi internaţionale şi publicate în reviste de specialitate cotate ISI. Obiectivele propuse au fost realizate în totalitate. Menţionăm că în anul de raportare 2014 au fost publicate sau acceptate spre publicare **6 articole în reviste cotate ISI**.

În acest an a fost programat următorul obiectiv de cercetare: *Obţinerea unor rezultate noi de tip Filippov-Plis cu aplicaţii în probleme de invarianţă, aproape viabilitate şi relaxare.* Acest obiectiv a fost îndeplinit în totalitate.

Prezentăm în continuare, sub o formă rezumativă, principalele rezultate obţinute.

Fie X un spaţiu Banach, $A : D(A) \subseteq X \rightsquigarrow X$ un operator m-disipativ, care generează un semigrup (posibil neliniar) $\left\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)};\ t \geq 0\right\}$ şi $F : [0, T] \times X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie cu valori nevide. Pentru $\xi \in \overline{D(A)}$ am considerat problema Cauchy

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)),\ x(0) = \xi. \tag{1}$$

Funcţia continuă $x : [0, T] \to \overline{D(A)}$ este *soluţie a problemei* (1) dacă este soluţie integrală a problemei

$$x'(t) \in Ax(t) + f(t),\ x(0) = \xi \in \overline{D(A)}, \tag{2}$$

unde f este o funcţie integrabilă Bochner cu $f(t) \in F(t, x(t))$ a.p.t. $t \in [0, T]$. Amintim că funcţia continuă $x(\cdot)$ este *soluţie integrală a problemei* (2) pe $[0, T]$ dacă, pentru orice $u \in D(A)$, $v \in Au$, $0 \leq t \leq T$, are loc următoarea inegalitate:

$$\|x(t) - u\| \leq \|\xi - u\| + \int_0^t [x(\tau) - u, f(\tau) - v]_+ \, d\tau.$$

Menţionăm că prin $[x, y]_+$ am notat derivata direcţională la dreapta a normei calculată în x în direcţia y.

Definiţie. O funcţie Caratheodory $\omega : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, integral mărginită pe mulţimi mărginite, se numeşte *funcţie Perron* dacă, pentru orice $T > 0$, funcţia nulă este singura soluţie pe $[0, T]$ a problemei

$$r'(t) = \omega(t, r(t)),\ r(0) = 0.$$

Un rezultat important privind funcţiile Perron, pe care l-am utilizat în studiul nostru este următorul:

Lemă. *Presupunem că* $\omega : [0,T] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este o funcţie Perron, integral mărginită, şi* $(a_k)_k, (b_k)_k \subset \mathbb{R}_+$ *sunt două şiruri convergente la* 0. *Fie* $r_k(\cdot)$ *o soluţie a problemei*

$$r'(t) = \omega(t, r(t)) + a_k, \; r(0) = b_k.$$

Atunci, $\lim_{k\to\infty} r_k(t) = 0$ *uniform pentru orice* $t \in [0,T]$.

Definiţie. Multifuncţia $F : [0,T] \times X \rightsquigarrow X$ se numeşte *unilateral Perron* (relativ la funcţia Perron ω) dacă, pentru orice $x, y \in X$, a.p.t. $t \in [0,T]$ şi orice $f \in F(t,x)$, există $g \in F(t,y)$ astfel încât

$$[x-y, f-g]_+ \leq \omega(t, \|x-y\|).$$

In unele lucrări aceste multifuncţii sunt numite *unilateral Kamke*. Condiţia unilateral Perron este considerabil mai slabă decât condiţia Lipschitz.

Am presupus următoarele ipoteze:

(H_1) X este spaţiu Banach separabil şi operatorul m-disipativ A generează un semigrup compact $\left\{S(t) : \overline{D(A)} \to \overline{D(A)}; \; t \geq 0\right\}$.

(H_2) Multifuncţia F este aproape inferior semicontinuă cu valori nevide, închise şi are creştere subliniară, adică există două funcţii pozitive integrabile Lebesgue $a(\cdot)$ şi $b(\cdot)$ astfel încât

$$\|v\| \leq a(t) + b(t)\|z\|,$$

a.p.t. $t \in [0,T]$ şi pentru orice $z \in X$ şi orice $v \in F(t,z)$.

Am demonstrat mai întâi următorul rezultat auxiliar.

Propoziţie. *Fie* $G : [0,T] \times X \rightsquigarrow X$ *o multifuncţie aproape inferior semicontinuă. Atunci există un şir* $(\Delta_m)_m$ *de submulţimi compacte disjuncte două câte două ale lui* $[0,T]$, *cu măsura Lebesgue a reuniunii* $\cup_m \Delta_m$ *egală cu* T, *astfel încât, pentru orice* $m \in \mathbb{N}^*$, $G(\cdot,\cdot)$ *este inferior semicontinuă pe* $\Delta_m \times X$.

Am demonstrat următorul rezultat nou de tip Filippov-Plis, în care am slăbit ipoteza Lipschitz asupra multifuncţiei F, impunând asupra ei condiţia unilateral Perron.

Teoremă. *Presupunem* (H_1) *şi* (H_2). *În plus, presupunem că* $F : [0,T] \times X \rightsquigarrow X$ *este unilateral Perron (relativ la o funcţie Perron* ω*) şi* $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ *este o funcţie integrabilă Lebesgue pozitivă. Atunci, pentru orice* $\xi \in \overline{D(A)}$, $\varepsilon > 0$ *şi orice soluţie* $x(\cdot)$ *pe* $[0,T]$ *a problemei*

$$x'(t) \in Ax(t) + F(t, x(t)) + f(t)B, \; x(0) = \xi,$$

există o soluţie a problemei (1) *pe* $[0,T]$, $y(\cdot)$, *astfel încât*

$$\|x(t) - y(t)\| \leq r_\varepsilon(t),$$

pentru orice $t \in [0,T]$, *unde* $r_\varepsilon(\cdot)$ *este soluţia maximală a problemei Cauchy*

$$r'(t) = \omega(t, r(t)) + f(t) + \varepsilon, \; r(0) = 0.$$

Un rezultat similar a fost obţinut în lucrarea [O. Cârjă, T. Donchev, V. Postolache, *Nonlinear evolution inclusions with one-sided Perron right-hand side*, J. Dyn. Control Syst., 2013] în cazul când spaţiul Banach X are dualul uniform convex. În plus, ipoteza de continuitate impusă asupra multifuncţiei F este de tip superior semicontinuă.

Problemele de relaxare constau în demonstrarea faptului că mulţimea soluţiilor problemei iniţiale (neconvexe) (1) este densă în mulţimea soluţiilor problemei convexificate (relaxate):

$$x'(t) \in Ax(t) + \overline{co}F(t, x(t)),\ x(0) = \xi. \tag{3}$$

Rezultatele de relaxare existente pentru incluziuni diferenţiale neliniare presupun condiţii Lipschitz asupra multifuncţiei F. De asemenea, aceste rezultate sunt obţinute în ipoteza suplimentară că spaţiul Banach X este reflexiv.

Rezultatele de relaxare pe care le-am stabilit în cadrul acestui proiect au loc în ipoteze mai slabe asupra lui F decât condiţia Lipschitz, anume presupunem condiţii de tip unilateral Perron. De asemenea, nu impunem reflexivitatea spaţiului Banach X.

Astfel, am obţinut urmărorul rezultat:

<u>Teoremă</u>. *Fie X spaţiu Banach separabil. Presupunem că (H_1) şi (H_2) au loc. În plus, presupunem că există o funcţie Perron $\omega(\cdot,\cdot)$ astfel încât, pentru orice $x, y \in X$, a.p.t. $t \in [0,T]$ şi orice $f \in \overline{co}F(t,x)$, există $g \in F(t,y)$ astfel încât*

$$[x - y, f - g]_+ \leq \omega(t, \|x - y\|).$$

Atunci, mulţimea soluţiilor problemei iniţiale (1) *este densă în mulţimea soluţiilor problemei* (3).

Am considerat apoi următoarea ecuaţie cu derivate parţiale de tip parabolic:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,z)}{\partial t} - \Delta x(t,z)\,|x(t,z)|^{r-1} &\in F(t,z,x(t,z)) \\ x(t,z) &= 0 \text{ pe } [0,T] \times \Gamma \\ x(0,z) &= x_0(z) \text{ în } \Omega, \end{aligned} \tag{4}$$

unde Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera Γ netedă şi $r > (n-2)/n$. Multifuncţia $F : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ are valori închise şi este inferior semicontinuă în a treia variabilă. De asemenea, am presupus că multifuncţia $G : [0,T] \times L^1(\Omega) \rightsquigarrow L^1(\Omega)$, definită prin

$$G(t,y) = \left\{ f \in L^1(\Omega);\ f(z) \in F(t,z,y(z)) \text{ a.p.t. pe } \Omega \right\}$$

este măsurabilă pe $[0,T] \times L^1(\Omega)$. Am arătat că problema (4) poate fi scrisă în forma abstractă (1). În plus am presupus că existăo funcţie Perron $\omega(\cdot,\cdot)$ astfel încât, pentru orice $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$, a.p.t. $t \in [0,T]$ şi orice $f \in \overline{co}G(t,\varphi)$, există $g \in G(t,\psi)$ astfel încât

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega^+_{\varphi-\psi}} (f(z) - g(z))\,dz - \int_{\Omega^-_{\varphi-\psi}} (f(z) - g(z))\,dz \pm \int_{\Omega^0_{\varphi-\psi}} (f(z) - g(z))\,dz \\ &\leq \omega\left(t, \int_\Omega |\varphi(z) - \psi(z)|\,dz\right), \end{aligned}$$

unde $\Omega^{+(-,0)}_{\varphi-\psi} = \{z \in \Omega; \varphi(z) - \psi(z) > (<,=)\, 0\}$. Astfel, ipotezele teoremei precedente sunt satisfăcute. Fie $x(\cdot,\cdot) \in C([0,T], L^1(\Omega))$ o soluţie generalizată pe $[0,T] \times \Omega$ a problemei relaxate

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t,z)}{\partial t} - \Delta x(t,z)\,|x(t,z)|^{r-1} &\in \overline{co}F(t,z,x(t,z)) \\ x(t,z) &= 0 \text{ pe } [0,T] \times \Gamma \\ x(0,z) &= x_0(z) \text{ în } \Omega. \end{aligned}$$

Atunci, pentru $\varepsilon > 0$ găsim $x_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ o soluţie generalizată a problemei (4) astfel încât

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega |x(t,z) - x_\varepsilon(t,z)|\, dz < \varepsilon.$$

Ipoteza asupra multifuncţiei F din Teorema precedentă este mai tare dacât condiţia unilateral Perron. În următorul rezultat am presupus că F este unilateral Perron, dar am întărit ipoteza asupra spaţiului X.

Teoremă. *Fie X un spaţiu Banach cu aplicaţia de dualitate $J(\cdot)$ univocă. Presupunem că (H_1) şi (H_2) au loc. În plus, presupunem că $F : [0,T] \times X \rightsquigarrow X$ este unilateral Perron (cu ipoteza suplimentară că, a.p.t. $t \in [0,T]$, $\omega(t,\cdot)$ este nedescrescătoare). Atunci, mulţimea soluţiilor problemei iniţiale* (1) *este densă în mulţimea soluţiilor problemei* (3).

De asemenea, am considerat incluziunea diferenţială

$$D_C^q y(t) \in F(t, y(t)),\ y(t_0) = y_0,\ t \in I = [t_0, T], \tag{5}$$

unde F este o multifuncţie de la $I \times \mathbb{R}^n$ la $\mathbb{R}^n$. Am notat $D_C^q y$ derivata fracţională Caputo de ordinul $0 < q < 1$, anume

$$D_C^q y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-q}\, \dot{u}(s)\, ds,\ t_0 < t < T.$$

Funcţia absolut continuă $y(\cdot)$ se numeşte *soluţie* a problemei (5) dacă există o selecţie măsurabilă $f_y(t) \in F(t, y(t))$ astfel încât pentru orice $t \in I$ să avem

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f_y(s)\, ds.$$

Presupunem următoarea ipoteză asupra multifuncţiei F :

(H) $F : I \times \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ este superior semicontinuă cu valori nevide, convexe, compacte. Mai mult, există o constantă α astfel încât

$$|F(t,x)| \le \alpha(1 + |x|),\ \forall (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n.$$

Fie $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime închisă şi fie $y_0 \in K$. Am studiat în continuare problema viabilităţii, adică a existenţei unei soluţii $y(\cdot)$ pentru (5) astfel încât $y(t) \in K$ pentru orice $t \in I$.

Definiţie. Fie $\varepsilon > 0$. O funcţie absolut continuă $y(\cdot)$ se numeşte $\varepsilon-$*soluţie* pentru (5) dacă există o funcţie măsurabilă $g : I \to \mathbb{R}^n$ şi o funcţie monoton nedescrescătoare $\sigma : I \to I$ astfel încât

a) $|g(t)| \le \varepsilon$ pentru a.t. $t \in I$;

b) $t - \varepsilon \le \sigma(t) \le t$, $\forall t \in I$;

c) $y(\sigma(t)) \in K$, $\forall t \in I$;

d) există o selecţie măsurabilă $f_y(t) \in F(\sigma(t), y(t)) + g(t) B$ astfel încât pentru orice $t \in I$ să avem

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{t_0}^t (t-s)^{q-1} f_y(s)\, ds.$$

Definiţie. Spunem că perechea (g, E) este *tangentă la* $I \times K$ *în* $(\overline{t}, \overline{y}) \in I \times K$ dacă $y(\overline{t}) = \overline{y}$ şi

$$\liminf_{h\to 0^+} h^{-q} d\left(\overline{y} + r(\overline{t}, g(\cdot))(h) + \frac{h^q}{\Gamma(q+1)} E, K\right) = 0.$$

A fost obţinut următorul rezultat:

<u>Teoremă</u>. *Fie* $t_0 \le \bar{t} < T$ *şi fie* $y(\cdot)$ *o funcţie absolut continuă pe* $[t_0, \bar{t}]$ *cu* $y(t_0) = y_0$. *Dacă perechea* $\left(D_C^q y(\cdot), F(\bar{t}, y(\bar{t}))\right)$ *este tangentă la* $I \times K$ *în* $(\bar{t}, \overline{y}) \in I \times K$ *atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta > 0$ *şi o prelungire* $z(\cdot)$ *a lui* $y(\cdot)$ *care este* ε*-soluţie a lui* (5) *pe* $[\bar{t}, \bar{t} + \delta]$ *şi astfel încât* $z(\bar{t} + \delta) \in K$.

<u>Definiţie.</u> Spunem că sistemul (5) satisface *condiţia de tangenţă* în $(\bar{t}, \overline{y}) \in I \times K$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o ε-soluţie $y(\cdot)$ pe $[t_0, \bar{t}]$ astfel încât perechea $\left(D_C^q y(\cdot), F(\bar{t}, \overline{y})\right)$ să fie tangentă la $I \times K$ în $(\bar{t}, \overline{y})$.

<u>Teoremă</u>. *Presupunem că (H) este îndeplinită. Dacă sistemul* (5) *satisface condiţia de tangenţă în orice* $(\bar{t}, \overline{y}) \in I \times K$, *atunci are o soluţie viabilă.*

În anul **2014** au fost publicate sau acceptate spre publicare **6 articole în reviste cotate ISI**, articole sprijinite financiar de proiect, fapt confirmat de textul corespunzător din secţiunea Acknowledgement.

1. T. Donchev, A. Nosheen, Fuzzy differential equations under dissipative and compactness type conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), No. 47, pp. 1-9. (ISI, FI=0.419).
2. E. Farkhi, T. Donchev, R. Baier, Existence of solutions for nonconvex differential inclusions of monotone type, C.R. Acad. Bulg. Sci., Vol. 67 (2014), No. 3, pp. 323-330. (IS, FI=0.198, SRI=0.051).
3. T. Donchev, A. Nosheen, V. Lupulescu, Fuzzy integro-differential equations with compactness type conditions, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 43 (2014), No. 2, pp. 249-257. (ISI, FI=0.433, SRI=0.222).
4. O. Cârjă, T. Donchev, V. Postolache, Relaxation results for nonlinear evolution inclusions with one-sided Perron right-hand side, Set-Valued Var. Anal., Vol. 22 (2014), No. 4, pp. 657-671. (ISI, FI=0.918, SRI=1.368).
5. O. Cârjă, T. Donchev, M. Rafaqat, R. Ahmed, Viability of fractional differential inclusions, Applied Mathematics Letters, 2014, 38, pp. 48-51. (ISI, FI=1.48, SRI=0.853).
6. T. Donchev, A. Nosheen, Value function and optimal control of differential inclusions, Annals of the Alexandru Ioan Cuza University - Mathematics, DOI: 10.2478/aicu-2014-0031, 2014. (ISI, FI=0.108, SRI=0.054).

FI=Factorul de impact (2013) conform Web of Knowledge.

SRI=Scorul relativ de influenţă conform
http://uefiscdi.gov.ro/userfiles/file/CENAPOSS/Scor_Relativ_Influenta_2014.pdf

În scopul atingerii obiectivelor propuse au fost efectuate **stagii de cercetare** la University of Caliornia Berkeley, SUA, în perioada 18 mai- 2 iunie 2014, la Univesity of Architecture, Civil Engineering and Geodesy, Sofia, Bulgaria, în perioada 7-18 iulie 2014, la IMAR Bucuresti, Academia Română, în perioada 7-10 august 2014, la University of Crete, Grecia, în perioada 30 august-13 septembrie 2014, la Technische Universitat Wien, Austria, în perioada 22 septembrie-9 octombrie 2014. De asemenea, V. Postolache a participat la *NetCO 2014-Conference on "New Trends in Optimal Control"*, Tours, în perioada 23-27 iunie 2014.

Rezultate ale cercetării au fost prezentate în cadrul următoarelor **conferinţe** invitate şi manifestări ştiinţifice: *The 10th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Madrid, 7-11 iulie 2014 (A. I. Lazu, Estimates for large time controls), *Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Facultăţii de Matematică* în cadrul Zilelor Universităţii "Al. I. Cuza", Iaşi, 24 octombrie 2014 (A. I. Lazu, O. Cârjă, Estimates for slow controls), *Sesiunea de comunicări ştiinţifice a Institutului de Matematică "O. Mayer",* Iaşi, octombrie 2014 (O. Cârjă, Asupra echivalenţei dintre problema timpului minim şi problema normei minime).

Director de proiect,
Prof. dr. Ovidiu CÂRJĂ