MINISTERUL EDUCAŢIEI , CERCETĂRII ŞI TINERETULUI
UNIVERSITATEA "ALEXANDRU IOAN CUZA" IAŞI

Sinteza rezultatelor obţinute în perioada noiembrie 2011–octombrie 2013 în cadrul Proiectului PN-II-ID-PCE-2011-3-0154

PROPRIETĂŢI CALITATIVE ALE APLICAŢIEI SOLUŢIE ASOCIATE INCLUZIUNILOR DIFERENŢIALE

În cadrul prezentului proiect s-au desfăşurat activităţi de documentare şi informare, de cercetare şi elaborare de studii, prezentate la manifestări ştiinţifice naţionale şi internaţionale şi publicate în reviste de specialitate cotate ISI. Menţionăm că au fost publicate **13 articole (din care 11 în reviste cotate ISI)**. Obiectivele propuse au fost realizate în totalitate. Prezentăm în continuare pe scurt principalele rezultate obţinute, pe perioada de raportare.

Au fost realizate următoarele obiective de cercetare:

<u>**Obiectivul 1**</u>**: Obţinerea unor rezultate noi de invarianţă.**

1.1. *Rezultate de invarianţă pentru cazul neliniar în spaţii Banach, cu ipoteze mai slabe decât Lipschitz asupra multifuncţiei.*

Într-un spaţiu Banach X cu dualul uniform convex, am studiat incluziunea de evoluţie de forma $x'(t) \in Ax(t) + F(x(t))$, unde A este un operator m-disipativ şi F este o multifuncţie superior hemicontinuă cu valori nevide convexe şi slab compacte.

În cazul când F este unilateral Perron (o ipoteză care este considerabil mai slabă decât Lipschitz) cu creştere subliniară, am stabilit condiţii suficiente pentru invarianţa unei mulţmi $K \subseteq \overline{D(A)}$. Conceptul clasic de invarianţă a unei mulţimi presupune că toate soluţiile incluziunii diferenţiale considerate, ce iau startul din mulţimea dată, rămân în ea pentru totdeauna.

Recent, în Cârjă, Postolache (2011), problema de invarianţă a fost studiată în raport cu incluziunea diferenţială semiliniară. Autorii au stabilit condiţii suficiente pentru invarianţă, condiţii exprimate cu ajutorul unui concept nou de tangenţă, ce antrenează funcţii integrabile şi nu vectori, ca în cazul conceptelor clasice de tangenţă.

Obiectivul nostru a fost să arătăm că aceeşi condiţie de tangenţă ca şi în Cârjă, Postolache (2011) este suficientă şi pentru invarianţa unei mulţimi închise în raport cu incluziunea diferenţială neliniară.

Prezentăm în continuare rezultatul de invarianţă obţinut.

Funcţia $f \in L^1_{loc}(R_+; X)$ se numeşte *A-tangentă la mulţimea K în punctul $\xi \in K$*, dacă

$$\liminf_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \operatorname{dist}(x(h, 0, \xi, f); K) = 0,$$

unde prin $x(h, 0, \xi, f)$ am notat valoarea soluţieii problemei $x'(t) \in Ax(t) + f(t), x(0) = \xi$, calculată în h. Vom nota prin $\mathfrak{F}^A_K(\xi)$ clasa tuturor funcţiilor A-tangente la K în $\xi \in K$.

Teorema 1 *Dacă $K \subseteq \overline{D(A)}$ este o mulţime nevidă închisă astfel încât pentru orice $\xi \in K$ şi orice funcţie $f \in L^1_{loc}(R_+; X)$ cu proprietatea $f(t) \in F(\xi)$, pentru a.t. t, are loc $f \in \mathfrak{F}^A_K(\xi)$, atunci, K este invariantă în raport cu $A + F$.*

1.2. *Dezvoltarea teoriei de invarianţă pentru incluziuni diferenţiale impulsive în spaţii Banach.*

Am declanşat studierea incluziunilor diferenţiale impulsive pentru cazul finit dimensional. Au fost obţinute rezultate de aproximare a soluţiilor problemelor studiate prin metoda Euler şi Runge–Kutta de ordin superior.

În plus, am studiat ecuaţii diferenţiale de tip fuzzy cu intârziere, cu partea dreapta continuă. Am stabilit rezultate de existenţa, unicitate şi dependenţă continuă de datele iniţiale. De asemenea, am considerat existenţa soluţiilor globale şi stabilitatea lor.

<u>Obiectivul 2</u>: Studiul proprietăţilor de continuitate pentru aplicaţia soluţie asociată incluziunilor diferenţiale.

2.1. *Continuitatea aplicaţiei soluţie in ipoteze mai slabe asupra multifuncţiei F.*

i) Fie X un spaţiu Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatorul infinitezimal al unui semigrup compact de clasă C_0, $\{S(t) : X \to X; t \geq 0\}$, care verifică $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, pentru un număr real ω şi orice $t \geq 0$, şi $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie dată cu valori nevide, slab compacte si convexe. Am considerat incluziunea semiliniară

$$y'(t) \in Ay(t) + F(y(t)). \tag{1}$$

Există o bibliografie vastă in ceea ce priveşte mulţimea soluţiilor incluziunilor diferenţiale $\mathbb{S}$, punctul de pornire fiind rezultatele lui Filippov (1964, 1967) şi Plis (1965), pentru cazul $A = 0$. Există diferite ipoteze asupra multifuncţiei F: Lipschitz, Lipschitz unilaterală, Perron unilaterală, de tipul continuu.

In cadrul cercetării efectuate, ipoteza de bază asupra lui F este de tipul continuu de un modul prescris, ca in Plis (1965). Mai precis,

$$F\left(x_1\right) \subseteq F\left(x_2\right) + G\left(\|x_1 - x_2\|\right) B, \tag{2}$$

cu $G + \omega I$ o funcţie Perron, adică, o funcţie continuă cu $G\left(0\right) = 0$ astfel incat ecuaţia differentială

$$z'\left(t\right) = G\left(z\left(t\right)\right) + \omega z\left(t\right) \tag{3}$$

are funcţia nulă ca fiind unica soluţie cu $z\left(0\right) = 0$.

Pentru a demonstra semicontinuitatea inferioară a multifuncţiei $\mathbb{S}$, in primul rand, am obţinut un resultat de tipul Filippov-Plis, care dă proprietăţi de aproximare şi stabilitate ale soluţiilor in raport cu perturbări ale datelor iniţiale. In acest scop, am folosit o teoremă de viabilitate de Cârjă, Necula, Vrabie (2007, 2009), unde este aplicată o condiţie de tangenţă ce implică funcţii in loc de vectori. In particular, rezultatele obţinute in cadrul cercetării efectuate demonstreză puterea teoremei de viabilitate citate, care, la prima vedere, este dificil de aplicat.

In pasul doi, am aplicat un rezultat de Hale (1969, p. 24) privind semicontinuitatea superioară a mulţimii soluţiilor pentru o ecuaţie diferenţială in $\mathbb{R}$.

Mai precis, am stabilit următorul rezultat de regularitate.

Teorema 2 *Fie X un spaţiu Banach, $A : D\left(A\right) \subseteq X \to X$ generatorul infinitezimal al unui C_0-semigrup compact, $\left\{S\left(t\right) : X \to X;\ t \geq 0\right\}$, care satisface pentru un $\omega \in \mathbb{R}$, $\|S\left(t\right)\| \leq e^{\omega t}$, pentru orice $t \geq 0$, şi $F : X \rightsquigarrow X$ este o multifuncţie cu valori nevide, slab compacte si convexe. Presupunem că există $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$, o funcţie continuă, astfel incat are loc (2), pentru orice x_1, $x_2 \in X$. Mai mult, presupunem ca funcţia $H : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $H\left(x\right) = G(x) + \omega x$, este o funcţie Perron. Atunci, pentru orice $\theta > 0$ şi orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel incat, pentru orice $x, \overline{x} \in X$, cu $\|\overline{x} - x\| < \delta$, şi orice soluţie $y : [0, \sigma) \to X$, $\theta < \sigma$, a incluziunii (1), cu $y\left(0\right) = x$, există o soluţie $\overline{y} : [0, \tau) \to X$ cu $\overline{y}\left(0\right) = \overline{x}$ astfel incat $\theta < \tau$ şi $\|\overline{y}\left(t\right) - y\left(t\right)\| < \varepsilon$, pentru orice $t \in [0, \theta]$.*

ii) Am continuat studiul pentru cazul neliniar în cadrul unui spaţiu Banach X cu dualul uniform convex, considerând incluziunea de evoluţie de forma $x'(t) \in Ax(t) + F(x(t))$, unde A este un operator m-disipativ şi F este o multifuncţie superior hemicontinuă cu valori nevide convexe şi slab compacte.

În cazul când F este unilateral Perron (o ipoteză care este considerabil mai slabă decât Lipschitz) cu creştere subliniară, am demonstrat $\varepsilon-\delta$ semicontinuitatea inferioară a multifuncţiei soluţie asociată incluziunii diferenţiale neliniare considerate.

Trebuie să menţionăm lucrarea Tolstonogov, Umanskiĭ (1992), unde autorii, în ipoteze de compacitate asupra operatorului, obţin $\varepsilon-\delta$ semicontinuitatea superioară a multifuncţiei soluţie.

În comparaţie cu acest rezultat, noi am demonstrat, fără a presupune compacitatea operatorului, $\varepsilon-\delta$ semicontinuitatea inferioară a multifuncţiei soluţie.

Teorema 3 *Fie orice $\xi \in \overline{D(A)}$, $T>0$, şi $\lambda>0$. Atunci, există $\nu>0$ astfel încât, pentru orice $\overline{\xi} \in \overline{D(A)}$ cu $\|\xi-\overline{\xi}\| \leq \nu$ şi orice soluţie $x_{\xi}(\cdot)$ pe $[0,T]$ a problemei considerate cu data iniţială ξ, există o soluţie $y_{\overline{\xi}}(\cdot)$ pe $[0,T]$ a problemei considerate cu data iniţială $\overline{\xi}$ astfel încât, $\|x_{\xi}(t)-y_{\overline{\xi}}(t)\| \leq \lambda$, pentru orice $t \in [0,T]$.*

2.2. *Continuitatea aplicaţiei soluţie pentru probleme cu restricţii de stare.*

i) Am considerat mai întâi incluziunea diferenţială

$$y'(t) \in F(y(t)), \tag{4}$$

unde $F: K \rightsquigarrow X$ este o multifuncţie cu valori nevide şi K este o submulţime nevidă a unui spaţiu finit dimensional X. Prin soluţie a incluziunii (4) înţelegem o funcţie absolut continuă $y:[0,T]\to K$ care satisface (4) aproape pentru toţi $t\in[0,T]$. O soluţie a lui (4) pe intervalul $[0,T)$ se defineşte în mod similar. Pentru fiecare $x\in K$, am notat prin $\mathbb{S}(x)$ mulţimea tuturor soluţiilor incluziunii (4) care pornesc din x şi am stabilit condiţii pentru ca multifuncţia $\mathbb{S}$ să fie inferior semicontinuă.

Proprietăţilor multifuncţiei $\mathbb{S}$ au fost studiate de mulţi autori. Primele contribuţii în acest domeniu aparţin lui A. Filippov (1964, 1967) şi A. Plis (1965). Ipoteza centrală în teorema lui Filippov este continuitatea Lipschitz a membrului drept. Se cunosc numeroase extensii ale acestor rezultate (H. Frankowska 1990, Q.J. Zhu 1991, W. Kryszewski 2003, T. Donchev, E. Farkhi 2009 etc.) In cadrul acestui proiect am relaxat ipotezele asupra multifuncţiei F şi am demonstrat inferioara continuitate a lui $\mathbb{S}$.

Prezentăm în continuare rezultatul de inferioară continuitate a lui $\mathbb{S}$.

Teorema 4 *Fie X un spaţiu finit dimensional, K o submulţime local închisă a lui X, $F: K \rightsquigarrow X$ o multifuncţie continuă, cu valori convexe şi compacte. Presupunem că există $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie Perron astfel încât*

$$\sup_{p\in F(x)} \inf_{q\in F(y)} [x-y, p-q]_+ \leq G(\|x-y\|), \tag{5}$$

pentru orice $x,y\in K$. In plus, să presupunem că, pentru orice $x\in K$, are loc condiţia de tangenţă

$$F(x) \subseteq T_K(x). \tag{6}$$

Atunci, pentru orice $x_0\in K$, pentru orice $y_0:[0,T]\to K$ o soluţie a lui (4) cu $y_0(0)=x_0$ şi pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încât pentru orice $x_1\in K$ with $\|x_0-x_1\|<\delta$, există o soluţie $y_1:[0,T]\to K$ a lui (4) cu $y_1(0)=x_1$ astfel încât $\|y_1(s)-y_0(s)\|<\varepsilon$, pentru orice $s\in[0,T]$.

Menţionăm că prin $[x,y]_+$ am notat derivata direcţională la dreapta a normei calculată în x în direcţia y şi am notat cu $T_K(\xi)$ conul tangent al lui Bouligand la K în $\xi\in K$.

Dacă mulţimea K este închisă obţinem continuitatea multifuncţiei soluţie în raport cu distanţa Hausdorff.

Teorema 5 *Fie X un spaţiu finit dimensional, K o submulţime închisă a lui X, $F : K \rightsquigarrow X$ o multifuncţie continuă, cu valori convexe şi compacte. Presupunem că există $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie Perron astfel încât (5) are loc, pentru orice $x, y \in K$. In plus, să presupunem că, pentru orice $x \in K$, are loc (6). Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât, pentru orice $x_0, x_1 \in K$, cu $\|x_0 - x_1\| < \delta$ şi pentru orice $y_0 : [0, T] \to K$ soluţie a lui (4) cu $y_0(0) = x_0$ există o soluţie $y_1 : [0, T] \to K$ a lui (4) cu $y_1(0) = x_1$ astfel încât $\|y_1(s) - y_0(s)\| < \varepsilon$, pentru orice $s \in [0, T]$.*

ii) De asemenea, am considerat varianta neautonoma a problemei (4). Adică, incluziunea deferenţială,

$$y'(t) \in F(t, y(t)), \ y(t) \in K \subset \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T]. \tag{7}$$

Şi pentru acest caz, am obţinut continuitatea multifuncţiei soluţie în raport cu distanţa Hausdorff, presupunând că multifuncţia F (cu valori compacte) este unilateral Perron şi aproape inferior semicontinuă, condiţia suficientă fiind exprimată prin intermediul conului normal proximal al mulţimii închise K.

Mai mult, pentru cazul aproape superior semicontinuu, presupunând în plus că F are valori convexe, am demonstrat continuitatea multifuncţiei soluţie.

2.3. *Rezultate de relaxare pentru incluziuni diferenţiale.*

Pe lângă problema (7), am considerat versiunea ei relaxată:

$$y'(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} F(t, y(t) + \varepsilon \mathbb{B}), \ y(t) \in K \subset \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T]. \tag{8}$$

Am arătat că mulţimea soluţiilor problemei (7) este densă în mulţimea soluţiilor problemei (8), presupunând că multifuncţia F (cu valori compacte) este unilateral Perron şi aproape inferior semicontinuă, condiţia suficientă fiind exprimată prin intermediul conului normal proximal al mulţimii închise K.

Obiectivul 3: **Stabilirea unor rezultate noi de controlabilitate şi în problema timpului optimal.**

3.1. *Regularitatea funcţiei valoare în legătură cu principiul de optimalitate şi ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman corespunzătoare pentru sisteme de evoluţie.*

i) Fie $F : K \rightsquigarrow X$ este o multifuncţie cu valori nevide, K o submulţime a unui spaţiu finit dimensional X care conţine 0 şi considerăm incluziunea diferenţială (4). Funcţia timp optimal asociată incluziunii (4), $T : K \to [0, +\infty]$, este definită prin

$$T(x) = \{\inf T \geq 0; \exists y \text{ soluţie a lui } (4) \text{ care satisface } y(t) \in K \ \forall t \in [0, T], \ y(0) = x, \ y(T) = 0\}.$$

Dacă nu există nici o soluţie din x care să atingă ţinta atunci $T(x) = +\infty$. Notăm cu $\mathcal{R}$ mulţimea punctelor $x \in K$ cu proprietatea că $T(x) < +\infty$. Considerăm următoarea ipoteză:

(H) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încât orice punct $x \in X \backslash \{0\}$ cu $\|x\| < \eta(\varepsilon)$ poate fi transferat in origine prin soluţii ale lui (4) într-un timp $t \leq \varepsilon$. Prezentăm rezultatul de propagare a continuităţii funcţiei timp optimal.

Teorema 6 *Fie X un spaţiu finit dimensional, K o submulţime închisă a lui X cu $0 \in K$, $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie continuă, cu valori convexe şi compacte. Presupunem că există $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ o funcţie Perron astfel încât are loc (5) pentru orice $x, y \in K$ şi, pentru orice $x \in K$, are loc (6). Presupunem că ipoteza* (H) *este îndeplintă şi $0 \in F(0)$. Atunci mulţimea de atingibilitate $\mathcal{R}$ este deschisă în K şi funcţia timp optimal T este local uniform continuă pe $\mathcal{R}$.*

ii) Am continuat cu studiul ecuaţiei Bellman pentru problema de timp minimal asociată cu un sistem semiliniar de evoluţie, din punct de vedere al soluţiilor contingente. Pentru acest scop, am definit derivate contingente de tip nou, care antrenează funcţii în loc de vectori pe post de "direcţii". Analiza efectuată este bazată pe rezultate de invarianţă pentru incluziuni diferenţiale adecvat construite.

Fie X un spaţiu Banach reflexiv, $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatorul infinitezimal al unui semigrup compact de clasă C_0, $\{S(t) : X \to X; t \geq 0\}$, care verifică $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, pentru un număr real ω şi orice $t \geq 0$, şi $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie dată cu valori nevide închise convexe şi mărginite astfel încât $0 \in F(0)$. Am considerat incluziunea semiliniară

$$y'(t) \in Ay(t) + F(y(t)) \tag{9}$$

şi problema de control optimal asociată ei care constă în atingerea ţintei $\{0\}$, pornind din punctul iniţial x, în timp minimal $T(x)$, pe traiectoriile ecuaţiei (9). Am analizat funcţia de timp minimal $T(\cdot)$ în raport cu principiul de optimalitate al lui Bellman şi ecuaţia Hamilton-Jacobi-Bellman corespunzătoare

$$\inf_{u \in F(x)} \langle DT(x), u\rangle + \langle DT(x), Ax\rangle + 1 = 0, \tag{10}$$

pe $\mathcal{R} = \mathrm{dom}(T)$.

Vom nota prin $y_x(\cdot)$ o soluţie a problemei (9) cu $y(0) = x$. Pentru orice $x \in X\backslash\{0\}$ şi orice soluţie $y_x(\cdot)$ a problemei (9), să notăm $\tau(x, y_x(\cdot)) = \min\{t \geq 0 : y_x(t) = 0\} \in [0, \infty]$. Să definim $\mathcal{R}$ ca fiind mulţimea tuturor punctelor $x \in X \setminus \{0\}$ astfel încât $\tau(x, y_x(\cdot)) < \infty$, pentru o soluţie $y_x(\cdot)$. Prin funcţia de timp minimal vom înţelege $T : \mathcal{R} \to [0, \infty)$, $T(x) = \inf\limits_{y_x(\cdot)} \tau(x, y_x(\cdot))$.

Presupunem următoarele: (H0) pentru orice $x \in \mathcal{R}$, există o soluţie y a problemei (9) astfel încât $y(0) = x$ şi $y(T(x)) = 0$; (H1) multifuncţia F este Lipschitz, adică, există $L > 0$ astfel încât $F(x) \subseteq F(y) + L\|x - y\|B$, $\forall x,\ y \in X$.

Rezultatul stabilit arată că continuitatea lui $T(\cdot)$ în jurul ţintei implică continuitatea uniformă locală pe întregul domeniu de definiţie.

Teorema 7 *Presupunem adevărate ipotezele* (H0), (H1) *şi* (H). *În cazul $L + \omega > 0$, mulţimea $\mathcal{R}$ este deschisă şi funcţia de timp minimal $T(\cdot)$ este local uniform continuă pe $\mathcal{R}$. În cazul $L + \omega \leq 0$, avem $\mathcal{R} = X\backslash\{0\}$ şi funcţia de timp minimal este uniform continuă pe $\mathcal{R}$.*

Mai mult, am arătat că principiul de optimalitate al lui Bellman împreună cu o condiţie potrivită la frontieră definesc în mod unic funcţia de timp minimal.

Pentru a defini în mod potrivit o soluţie a ecuaţiei (10), introducem conceptul de derivată inferioară A-contingentă:

$$\underline{D}^A V(x)(g) = \liminf_{\substack{h \downarrow 0 \\ w \to 0}} \frac{V(S(h)x + \int_0^h S(h-s)g(s)ds + hw) - V(x)}{h}, \tag{11}$$

unde "direcţia" g este o funcţie în $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+, X)$. Mai definim şi $\overline{D}^A V(x)(g) = -\underline{D}^A(-V)(x)(g)$.

Definiţia 1 *O funcţie $T(\cdot)$ este o soluţie contingentă a ecuaţiei* (10)*, dacă pentru orice $x \in \mathcal{R}$ avem* $\inf_{g(\cdot) \in F(x)_{L^1}} \underline{D}^A T(x)(g) + 1 \leq 0$ *şi* $\inf_{g(\cdot) \in F(x)_{L^1}} \overline{D}^A T(x)(g) + 1 \geq 0$.

Teorema 8 *Presupunem adevărate ipotezele* (H0), (H1) *şi* (H). *Atunci, funcţia de timp minimal $T(\cdot)$ este unica soluţie contingentă continuă a ecuaţiei* (10) *care verifică condiţiile la frontieră $T[0] = 0$; $T[x] = \infty$, $\forall x \in \partial\mathcal{R}\backslash\{0\}$.*

iii) Am stabilit un rezultat de propagare a continuitătii pentru funcţia timpului minimal în conexiune cu principiul de optimalitate al lui Bellman.

Pentru orice $x \in X$, să notăm cu $\mathbb{S}(x)$ mulţimea soluţiilor incluziunii diferenţiale (9) cu $y(0) = x$.

Un rol important în obţinerea rezultatelor de propagare a proprietăţilor de continuitate ale funcţiei timpului minimal in jurul originii pe intreaga mulţime de atingibilitate este jucat de dependenţa Lipschitz a soluţiilor de datele iniţiale, furnizată de ipoteza ca F este Lipschitz. De fapt, proprietatea Lipschitz a multifuncţiei $\mathbb{S}(\cdot)$ este un instrument important in stabilirea rezultatelor de regularitate pentru funcţia-valoare in probleme de control optimal. În cadrul cercetării efectuate, am demonstrat ca continuitatea in jurul ţintei aduce la locală continuitate uniformă a funcţiei timpului minimal pe intreaga mulţime de atingibilitate, presupunand ipoteze mai slabe asupra lui F.

Proprietatea de baza a funcţiei timpului minimal este principiul de optimalitate al lui Bellman (sau principiul programării dinamice) care spune că, pentru orice $x \in \mathcal{R}$ şi orice solutie $y(\cdot)$ a incluziunii (9) ce porneşte din x,

$$T(x) \leq t + T(y(t)), \ \forall t \in [0, \tau(x, y(\cdot))),$$

cu egalitate in cazul cand $y(\cdot)$ este optimală. Această proprietate a funcţiei timpului minimal joacă un rol important in stabilirea următorului resultat, care arată că continuitatea funcţiei $T(\cdot)$ in jurul ţintei implică locală continuitate uniformă pe inteaga mulţime de atingibilitate. In [1] a fost demonstrat un rezultat similar presupunand ipotezele (H_0), (H), şi faptul ca multifuncţia F este Lipschitz. Noi am arătat in cadrul cercetării noastre ca această proprietate de propagare are loc dacă presupunem ipoteze mai slabe asupra lui F.

Teorema 9 *Fie X un spaţiu Banach, $A : D(A) \subseteq X \to X$ generatorul infinitezimal al unui C_0-semigrup compact, $\{S(t) : X \to X;\ t \geq 0\}$, satisfacand, pentru un $\omega \in \mathbb{R}$, $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$, pentru orice $t \geq 0$, şi $F : X \rightsquigarrow X$ o multifuncţie cu valori nevide, slab compacte si convexe, cu $0 \in F(0)$. Să presupunem că există $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$, o funcţie continuă, astfel incat (2) are loc, pentru orice x_1, $x_2 \in X$, şi funcţia $H : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $H(x) = G(x) + \omega x$, este o funcţie Perron. Mai mult, să presupunem (H_0) şi (H). Atunci, avem că mulţimea de atingibilitate $\mathcal{R}$ este deschisă şi funcţia timpului minimal $T(\cdot)$ este local uniform continuă pe $\mathcal{R}$.*

Regularitatea mulţimii soluţiilor $\mathbb{S}$ (vezi Teorema 2) este instrumentul de bază in stabilirea rezultatului de mai sus.

iv) În final, într-un spaţiu Banach X cu dualul uniform convex, am studiat funcţia de timp minimal (definită ca mai sus) asociată incluziunii de evoluţie de forma $x'(t) \in Ax(t) + F(x(t))$, unde A este un operator m-disipativ şi F este o multifuncţie superior hemicontinuă şi unilateral Perron cu valori nevide convexe şi slab compacte.

Fără a presupune că operatorul generează un semigrup compact, am arătat că ipoteza (H) implică semicontinuitatea superioară a funcţiei de timp minimal pe întregul domeniu ei de definiţie.

Teorema 10 *Presupunem adevărată ipoteza (H). Mulţimea $\mathcal{R}$ este deschisă în $\overline{D(A)}$ şi funcţia de timp minimal T este superior semicontinuă pe $\mathcal{R}$.*

3.2. *Evoluţia mulţimii punctelor care se pot atinge (reachable set).*

Într-un spaţiu Banach X cu dualul uniform convex, am studiat evoluţia (când $t \to +\infty$) pentru mulţimea punctelor care se pot atinge asociată incluziunii diferenţiale de forma $x'(t) \in Ax(t) + F(x(t))$, unde A este un operator m-disipativ care generează un semigrup echicontinuu şi F este o multifuncţie superior hemicontinuă şi unilateral Lipschitz de constantă negativă cu valori nevide convexe şi slab compacte.

Fie $x_0 \in \overline{D(A)}$ şi $t \geq 0$. Înţelegem prin *mulţimea punctelor care se pot atinge (reachable set)* mulţimea $Reach_{x_0}(t) = \{v \in X : \exists$ o soluţie $y(\cdot)$ a problemei considerate cu data iniţială x_0 a. î. $y(t) = v\}$.

Rezultatul obţinut extinde cele din Donchev, Farkhi, Reich (2003, 2007), fără a presupune că operatorul A generazeă un semigrup compact.

Teorema 11 *Mulţimea $\mathrm{Reach}_{x_0}(t)$ are limită când $t \to +\infty$ (în sensul şirurilor generalizate) pentru orice $x_0 \in \overline{D(A)}$, limita care este unicul atractor tare pentru problema considerată.*

În perioada noiembrie 2011–octombrie 2013 au fost publicate **13 articole (din care 11 în reviste cotate ISI)**, articole sprijinite financiar de proiect, fapt confirmat de textul corespunzător din secţunea Acknowledgement:

1. Cârjă, O., *The minimum time function for semilinear evolutions*, SIAM Journal on Control and Optimization, 2012, 50 (3), pp. 1265–1282.
2. Cârjă, O., Lazu, A. I., *Approximate weak invariance for differential inclusions in Banach spaces*, Journal of Dynamical and Control Systems, 2012, 18 (2), pp. 215–227.
3. Cârjă, O., Lazu, A. I., *On the regularity of the solution map for differential inclusions*, Dynamic Systems and Applications, 2012, 21 (2-3), pp. 457–465.
4. Baier, R., Din, Q., Donchev, T., *Higher order Runge-Kutta methods for impulsive differential systems*, Applied Mathematics and Computation, 2012, 218 (24), pp. 11790–11798.
5. Din, Q., Donchev, T., Kolev, D., *Filippov–Pliss lemma and m-dissipative differential inclusions*, J. Glob. Optim., 2013, 56 (4), pp. 1707–1717.
6. Cârjă, O., Donchev, T., Postolache, V., *Nonlinear Evolution Inclusions with One-sided Perron Right-hand Side*, Journal of Dynamical and Control Systems, 2013, 18 (3), pp. 439-456.
7. Din, Q., Donchev, T., Kolev, D., *Numerical Approximations of Impulsive Delay Differential Equations*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 2013, 34 (7), pp. 728-740.
8. Donchev, T., Lazu, A. I., Nosheen, A., *One-sided Perron Differential Inclusions*, Set-Valued Var. Anal., 2013, 21 (2), pp. 283–296.
9. Din, Q., Donchev, T., *Global character of a host-parasite model*, Chaos, Solitons & Fractals, 2013, 54, pp. 1–7.
10. Donchev, T., Nosheen, A., *Fuzzy functional differential equations under dissipative-type conditions*, Ukrainian Mathematical Journal, 2013, 65 (6), pp. 787–795.
11. Cârjă, O., Lazu, A. I., *Lower semi-continuity of the solution set for semi-linear differential inclusions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385, pp. 865–873.
12. Donchev, T., Nosheen, A., Pecaric, J., *Hardy-Type Inequalities on Time Scale via Convexity in Several Variables*, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2013, Article ID 903196, 9 pages, http://dx.doi.org/10.1155/2013/903196.
13. Donchev, T., Kolev, D., Nakagawa, K., *Weakened Condition for the Stability to solutions of Parabolic Equations with "Maxima"*, Journal of Prime Research in Mathematics, 2013, 9, pp. 148-158.

Rezultate ale cercetării au fost prezentate în cadrul următoarelor conferinţe invitate şi manifestări ştiinţifice: Dhahran, Arabia Saudita (December 2011); Ibn Zohr University Agadir (Aprilie 2012); University of California, Berkeley (August–Septembrie 2012); 12th Viennese Workshop on Optimal Control, Dynamic Games and Nonlinear Dynamics (Mai–Iunie 2012); Research School on Controllability of Deterministic and Stochastic Systems and its Applications, Iaşi (June 2012); International Conference on Controlled Deterministic and Stochastic Systems, Iaşi (July 2012); Firt RoAIMS Applied and Industrial Mathematics Symposium, Iaşi (May 24–26, 2013); 9th International Conference on "Large-Scale Scientific Computations", Sozopol, (June 3–7, 2013); International Conference "DYNAMICAL SYSTEMS: STABILITY, CONTROL, OPTIMIZATION"(DSSCO13), dedicated to the 95th anniversary of Ye.A. Barbashin, Minsk (October 1–5, 2013).

Director de proiect,
Prof. Dr. Ovidiu CÂRJĂ