1 Preliminarii

Fie M, A mulţimi nevide şi $n \in \mathbb{N}$. Se muneşte **operaţie** $n-$**ară** (sau **lege de compoziţie** n-**ară**) definită pe M orice aplicaţie $\tau : M^n \to M$ ($M^n = \underbrace{M \times ... \times M}_{n\ ori}$). In cazul $n = 2$, obţinem **operaţiile binare** şi vom nota, pentru $\tau : M^2 \to M$, în loc de $\tau(a, b)$, $a\tau b$. Mai mult, vom nota $\cdot, +, *, \circ : M^2 \to M$, respectiv $a \cdot b, a + b, a * b, a \circ b$ etc.[1]. In cazul $n = 0$ se obţin **operaţiile 0-are** ($M^0 = \{*\}-$mulţimea cu un singur element, $\tau : M^0 \to M$ însemnând precizarea unui element din M), iar pentru $n = 1$ se obţin **operaţiile unare**. Aplicaţiile $A \times M \to M(M \times A \to M)$ mai sunt numite **operaţii externe** la stânga (dreapta) pe M peste A.

O mulţime nevidă înzestrată cu un număr de operaţii satisfăcând eventual anumite proprietăţi este numită **structură algebrică**. Numărul, tipul şi proprietăţile operaţiilor determină tipul de structură algebrică, iar mulţimea dată este numită **mulţimea subiacentă** structurii algebrice obţinute.

Dintre problemele care apar în contextul structurilor algebrice amintim: studiul legăturilor dintre structurile algebrice de acelaşi tip, anume al aplicaţiilor ce "transportă" operaţiile (morfisme); studiul unor submulţimi ale mulţimilor subiacente; studiul unor elemente remarcabile; studiul aspectelor specifice ce apar în legătură cu noţiuni şi construcţii matematice, precum relaţiile de ordine sau de echivalenţă etc.

Dintre proprietăţile care se impun operaţiilor se disting: asociativitatea, comutativitatea, existenţa elementului neutru, inversabilitatea elementelor, distributivitatea (în cazul a 2 operaţii) etc..

Concret (în general va fi utilizată, pentru simplitate, notaţia multiplivativă):

- operaţia $\cdot$: $M^2 \to M$ este numită **operaţie asociativă** dacă: $\forall (a, b, c) \in M^3$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (notăm $a \cdot b \cdot c$, obţinând astfel şi $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$ pentru $x_1, ..., x_n \in M$);

- spunem că $e \in M$ este **element neutru** pentru operaţia $\cdot : M^2 \to M$ dacă: $\forall a \in M$, $a \cdot e = e \cdot a = a$ (din $e_1 = e_1 \cdot e_2 = e_2$ rezultă că, dacă "$\cdot$" admite element neutru, atunci acesta este unic);

- operaţia $\cdot : M^2 \to M$ este numită **operaţie comutativă** dacă: $\forall (a, b) \in M^2$, $a \cdot b = b \cdot a$;

- dacă $\cdot : M^2 \to M$ admite elementrul neutru e, atunci spunem că $x \in M$

[1] Notaţia "$\cdot$", ("$+$") este numită notaţie multiplicativă (aditivă) a operaţiei.

este **inversabil** dacă există $x' \in M$ astfel încât$x' \cdot x = e = x \cdot x'$ (x' este numit **inversul** lui x);[2]

- dacă $+, \cdot : M^2 \to M$ satisfac condiţia $\forall (a,b,c) \in M^3$, $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$, atunci spunem că "$\cdot$" este **distributivă** faţă de "+".

S-a remarcat anterior unicitatea elementului neutru (dacă există).

In urma unui raţionament inductiv, rezultă că au loc următoarele:

1. Dacă operaţia $\cdot : M^2 \to M$ este asociativă, atunci $\forall x_1, ..., x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avem că $(x_1 \cdot ... \cdot x_k) \cdot (x_{k+1} \cdot ... \cdot x_n) = (x_1 \cdot ... \cdot x_l) \cdot (x_{l+1} \cdot ... \cdot x_n)$, pentru orice k, l încât $a \leq k, l \leq n-1$ (**proprietatea de asociativitate generalizată**).

2. Dacă operaţia $\cdot : M^2 \to M$ este comutativă, atunci: $\forall x_1, ..., x_n \in M_1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice aplicaţie bijectivă $\tau : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$, avem că $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = x_{\tau(1)} \cdot ... \cdot x_{\tau(n)}$ (**propreitatea de comutativitate generalizată**).

Precizăm că în cazul unei operaţii $\cdot : M^2 \to M$ asociative, pentru $x \in M$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, se defineşte x^n prin $x^n = x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n$, unde $x_1 = x_2 = ... = x_n = x$. Obţinem:

i) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$;

ii) $(x^m)^n = x^{mn}$;

iii) dacă $x \cdot y = y \cdot x$ atunci $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$.

In notaţie aditivă, $nx = x + ... + x$, şi

i) $mx + nx = (m+n)x$;

ii) $m(nx) = (mn)x$;

iii) dacă $x + y = y + x$, atunci $n(x+y) = nx + ny$.

Definiţia 1.1. *O mulţime nevidă S înzestrată cu o operaţie binară asociativă $\cdot : S^2 \to S$ este numită* **semigrup**.

Notăm $(S, \cdot)$.

Exemple:

i) Mulţimea funcţiilor $\{f : M \to M\}$, $M \neq \emptyset$, împreună cu operaţia de compunere constituie un semigrup (numit **semigrupul transformărilor mulţimii** M);

ii) Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ împreună cu operaţia uzuală de adunare (sau de înmulţire) constituie un semigrup.

Definiţia 1.2. *Un semigrup ce admite elemente unitate mai este numit* **monoid**. *Este evident că elementul unitate este unic în cadrul unui monoid*

[2] In cazul notării operaţiei prin "$\cdot$", x' va mai fi notat x^{-1}, iar e va mai fi notat 1. In cazul notaţiei "+" x' va mai fi notat $-x$, iar e va mai fi notat 0.

dat.

Definiţia 1.3. *Un monoid $(G, \cdot, e)$ în care toate elementele sunt inversabile este numit* **grup**.

Explicitând obţinem "axiomele grupului": o mulţime $G \neq \emptyset$ este numită grup dacă:

i) G este înzestrată cu o operaţie binară $\cdot : G \times G \to G$;

ii) operaţia "$\cdot$" este asociativă: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $\forall (x, y, z) \in G^3$;

iii) $(G, \cdot)$ admite element neutru: $\exists e \in G : x \cdot e = x = e \cdot x$, $\forall x \in G$;

iv) elementele lui G sunt inversabile (relativ la "$\cdot$"): $\forall x \in G$, $\exists x^{-1} \in G :$ $x \cdot x^{-1} = e = x^{-1} \cdot x$.

Deşi axiomele pot fi încă simplificate (de exemplu este suficient să avem $x \cdot e = x$ sau $x \cdot x^{-1} = e$), va fi păstrată această variantă ("clasică").

Dacă, în plus:

v) $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall (x \cdot y) \in G^2$, spunem că G[3] este **grup comutativ** (sau **grup abelian**).

Exemple:

i) Pe o mulţime cu un singur element, $\{a\}$, se poate introduce o unică structură de grup, prin $a \cdot a = a = a^{-1} = e$. Este numit **grupul nul**.

ii) $(\mathbb{Z}, +, 0)$; $(\mathbb{Q}, +, 0)$; $(\mathbb{Q}^*, \cdot, 1)$; $(\mathbb{R}, +, 0)$; $(\mathbb{R}^*, \cdot, 1)$;

iii) Pentru o mulţime oarecare M, mulţimea $S(M)$ a bijecţiilor $M \to M$, împreună cu operaţia uzuală de compunere constituie un grup (este numit **grupul permutărilor mulţimii** M).

Dacă M este o mulţime finită având n elemente $(n \geq 2)$ (vom alege $M = \{1, 2, ..., n\}$), atunci $S(M)$ va fi notat S_n şi va fi numit **grupul permutărilor de grad** n.

Observaţia 1.1. S_n are $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$ elemente.

Un element din S_n va fi notat prin

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}, \text{ iar } \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix} = \varepsilon.$$

In cazul unei permutări σ, dacă $\dfrac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} < 0$, spunem că avem o **inversiune** în σ.

---

[3] Notăm, adeseori, G în loc de $(G, \cdot, e)$. In general, va fi folosită notaţia multiplicativă, cea aditivă va apare în unele cazuri concrete.

Notăm $\varepsilon_\sigma = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ şi obţinem $\varepsilon_\sigma = \pm 1$. Dacă numărul inversiunilor lui σ este par spunem că avem o **permutare pară** (deci $\varepsilon_\sigma = 1$). In caz contrar, o vom numi **permutare impară** ($\varepsilon_\sigma = -1$).

Fie $(G, *, e)$, $(G', \circ, e')$ două grupuri. Se numeşte **morfism de grupuri** de la G la G' orice funcţie $f : G \to G'$ ce satisface condiţia

$$f(a * b) = f(a) \circ f(b) \quad \text{(pentru orice } a, b \in G).$$

Rezultă imediat că $f(e) = e'$ şi

$$f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$$

(inversul fiind, evident, considerat în G, în membrul întâi şi, respectiv, în G').

Fie o mulţime nevidă înzestrată cu două operaţii (notate, de obicei, prin "+" şi "·"). Enunţăm următoarele condiţii:

1) Mulţimea dată are structură de grup abelian relativ la "+" (elementul neutru, numit şi element zero, se va nota prin 0, iar inversul unui element a va fi notat $-a$);

2) Mulţimea dată are structură de semigrup relativ la "·";

3) Operaţia "·" este distributivă faţă de operaţia "+" ($a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$; $(b+c)\cdot a = b\cdot a + c\cdot a$);

4) Operaţia "+" admite element neutru (notat 1);

5) Operaţia "·" este comutativă;

6) Orice element diferit de 0 (condiţia 4 se presupune îndeplinită) admite invers relativ la "·" (inversul lui a este notat a^{-1}).

Definiţia 1.4. *i) O mulţime nevidă R înzestrată cu două operaţii "+" şi "·" satisfăcând 1), 2), 3) este numită* **inel**.

ii) O mulţime nevidă R înzestrată cu două operaţii "+" şi "·" satisfăcând 1), 2), 3), 4) este numită **inel unitar**.

iii) O mulţime R înzestrată cu două operaţii "+" şi "·" satisfăcând 1), 2), 3), 5) este numită **inel comutativ**.

iv) O mulţime K, având cel puţin 2 elemente, înzestrată cu două operaţii "+" şi "·" satisfăcând 1), 2), 3), 4), 6) este numită **corp**;

v) O mulţime K având cel puţin 2 elemente, înzestrată cu două operaţii "+" şi "·" satisfăcând 1), 2), 3), 4), 5), 6) este numită **corp comutativ** *(sau* **câmp***).*

Observaţia 1.2. In orice inel (şi evident, în orice corp) au loc:

i) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$;

ii) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$; $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$;

iii) $a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a \cdot b_i$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot b = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot b$.

Intr-adevăr, $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$, deci $a \cdot 0 = 0$. Avem şi $0 = 0 \cdot b = (a + (-a)) \cdot b = a \cdot b + (-a) \cdot b$ deci $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Analog, rezultă $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. $(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b$. Relaţia iii) se demonstrează prin inducţie matematică.

Observaţia 1.3. In cazul unui corp $(K, +, \cdot)$ vom avea: $(K, +)$ este grup abelian, iar $(K^*, \cdot)$ este grup ($K^* = K \setminus \{0\}$). Precizăm că operaţiile vor fi notate (pentru orice structură considerată) prin "+" şi/sau "·" (înţelegându-se din context mulţimile pe care sunt definite, iar elementele neutre, dacă există, vor fi notate 0, respectiv 1).

Exemple:

i) inelul numerelor întregi $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$; corpul numerelor raţionale $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; corpul numerelor reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$; corpul numerelor complexe $(\mathbb{C}, +, \cdot)$;

ii) inelul întregilor lui Gauss $\mathbb{Z}[i] = \{m + ni,\ m, n \in \mathbb{Z}\}$, $i = \sqrt{-1}$, operaţiile fiind aceleaşi ca şi în C;

iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ are structură de corp faţă de operaţiile induse de operaţiile din $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;

Pe o mulţime cu un singur element se poate defini o structură de inel (unitar) impunând $a + a = a = a \cdot a = 0 = 1$. Este numit **inel nul**. O astfel de construcţie nu este posibilă în cazul corpurilor.

Fie R şi R' două inele. Se numeşte **morfism de inele** de la R la R' orice funcţie $f : R \to R'$ ce satisface condiţiile:

$f(a + b) = f(a) + f(b)$;

$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$, oricare ar fi $a, b \in R$.

Un morfism $f : R \to R'$, unde R şi R' sunt inele unitare, care satisface în plus condiţia $f(1) = 1$ este numit **morfism unitar de inele unitare**.

Prima condiţie din definiţia noţiunii de morfism conduce la faptul că f este morfism între grupurile $(R, +)$ şi $(R', +)$, deci vom avea $f(0) = 0$ şi $f(-a) = -f(a)$.

In ipoteza că f este în plus bijectivă, obţinem noţiunea de **izomorfism de inele**. Rezultă şi că f^{-1} este izomorfism de inele. Pentru un morfism de inele $f : R \to R'$ notăm $\ker f = \{x \mid x \in R, f(x) = 0 \in R'\}$, $\mathrm{Im} f = f(R)$.

Fie K, K' două corpuri. Se numeşte **morfism de corpuri** de la K la K' orice funcţie $f : K \to K'$ ce satisface condiţiile:

$f(a+b) = f(a) + f(b)$;
$f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$.

Altfel spus, f este un morfism de grupuri între $(K, +)$ şi $(K', +)$ şi morfism de grupuri între $(K^*, \cdot)$ şi $({K'}^*, \cdot)$. Rezultă de aici că $f(1) = 1$; $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$. Ca şi în cazul inelelor, un morfism bijectiv de corpuri va fi numit **izomorfism de corpuri**.

Fie R un inel comutativ şi unitar. Considerăm mulţimea şirurilor de elemente din R, $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ cu proprietatea că numărul componentelor diferite de $0 \in R$ este finit. Pe această mulţime se introduc operaţiile: $(a_0, a_1, ..., a_n, ...) + (b_0, b_1, ..., b_n, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, ..., a_n + b_n, ...)$ şi $(a_0, a_1, ..., a_n, ...) \cdot (b_0, b_1, ..., b_n, ...) = (c_0, c_1, ..., c_n, ...)$ unde $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i \cdot b_j$, $k \in \mathbb{N}$.

Aceste operaţii conferă mulţimii considerate structură de inel comutativ şi unitar, după cum se poate verifica uşor.

Pentru $\alpha \in R$, definind $\alpha(a_0, a_1, ...) = (\alpha \cdot a_0, \alpha \cdot a_1, ...)$ şi notând $X = (0, 1, 0, 0...)$ se obţine că $(a_0, a_1, ..., a_n, ...)$ poate fi scris sub forma $\sum\limits_k a_k X^k$, unde $X^k = \underbrace{X \cdot X \cdot ... \cdot X}_{k\ ori}$ (suma fiind finită).

Inelul construit anterior este numit *inelul polinoamelor de o nedeterminată peste* R şi este notat $R[X]$. Numărul $n = \max\{i \mid a_i \neq 0\}$ este numit **gradul polinomului** $(a_0, a_1, ...)$, iar a_n (în acest caz) este numit **coeficientul dominant** al polinomului. Pentru polinomul nul $(0, 0, ...)$ se convine să se considere gradul său ca fiind $-\infty$.

Polinoamele $(0, a, 0, ...)$ $a \in R$ se identifică cu $a \in R$, sunt numite **polinoame constante**, iar gradul lor este egal cu 0.

2 Algebră liniară

Matrice. Determinanţi

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ şi $M = \{1, 2, ..., m\}$, $N = \{1, 2, ..., n\}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. Reamintim că se numeşte *matrice de tip* (m, n) *peste* K orice funcţie $A : M \times N \to K$. Precizăm că, exceptând unele rezultate privind inversabilitatea matricelor şi sistemele liniare, noţiunile şi celelalte rezultate ce vor fi date în continuare îşi păstrează valabilitatea şi în cazul în care K este inel (comutativ şi unitar).

Notând $A(i,j) = a_{ij}$, $i \in M, j \in N$, matricea A poate fi reprezentată sub forma unui tablou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

având m "linii" şi n "coloane" (condensat $A = (a_{ij})_{m\times n}$).

Pe mulţimea matricelor de tip (m,n) peste K, notată $\mathcal{M}(m,n,K)$, se defineşte operaţia de adunare a matricelor prin: dacă $A, B \in \mathcal{M}(m,n,K)$, atunci $(A+B)(i,j) = A(i,j) + B(i,j)$, $\forall (i,j) \in M \times N$, obţinându-se:

- $(\mathcal{M}(m,n,K), +)$ are structură de grup abelian.

  Pentru matricile $A \in \mathcal{M}(m,n,K), A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B \in \mathcal{M}(n,p,K)$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ se defineşte o matrice $C \in \mathcal{M}(m,p,K)$ prin $C = (c_{ij})_{m\times p}$ unde $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq p$, numită **produsul matricelor** A şi B (notăm $C = A \cdot B$).

  In cazul $m = n$, mulţimea $\mathcal{M}(m,n,K)$ se notează prin $\mathcal{M}(n,K)$. Produsul definit anterior conduce la o operaţie "$\cdot$" pe $\mathcal{M}(n,K)$, obţinându-se:

- $(\mathcal{M}(n,K), +, \cdot)$ are structură de inel[4] unitar. Rolul de "matrice unitate" este jucat de $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$, $0, 1 \in K$.

Pentru $A \in \mathcal{M}(m,n,K)$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ şi $\lambda \in K$, se defineşte $\lambda A \in \mathcal{M}(m,n,K)$, $\lambda A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m\times n}$, obţinându-se o operaţie externă numită **produsul matricelor** (din $\mathcal{M}(m,n,K)$) **cu scalari** (din K).

Pentru $A \in \mathcal{M}(m,n,K)$, $A = (a_{ij})_{m\times n}$, matricea ${}^tA \in \mathcal{M}(n,m,K)$ ${}^tA = ({}^ta_{ke})_{n\times m}$, unde $t^a_{ke} = a_{ek}$, este numită **transpusa matricei** A.

[4] inel necomutativ

Fie $A \in \mathcal{M}(n, K)$. Elementul din K notat $\det A$ şi dat de $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} ... \cdot a_{n\sigma(n)}$ unde S_n notează mulţimea permutărilor de grad n şi

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \sigma \text{ este permutare pară,} \\ -1 & \text{dacă } \sigma \text{ este permutare impară,} \end{cases}$$

se numeşte **determinantul matricei** A[5] (se mai notează prin

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ sau } |a_{ij}|_{n\times n}).$$

In vederea indicării ulterioare a unui procedeu de calcul se definesc (pentru $A \in \mathcal{M}(n, K)$) noţiunile de minor şi complement algebric ale unui element.

Suprimând linia i (anume $a_{i1} ... a_{in}$) şi coloana j (anume $\begin{matrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jn} \end{matrix}$) din A, se obţine o matrice ${}_iA_j \in \mathcal{M}(n-1, K)$ al cărei determinant poartă numele de **minorul elementului** a_{ij} (va fi notat d_{ij}). Elementul $\delta_{ij} = (-1)^{i+j} d_{ij}$ va fi numit **complementul algebric al elementului** a_{ij}.

Au loc următoarele proprietăţi:

- $\det A = \det\ {}^tA$;
- dacă într-o matrice $A \in \mathcal{M}(n, K)$, $n \in \mathbb{N}^*$ se schimbă două linii (coloane) între ele atunci se obţine o matrice al cărei determinant este egal cu $-\det A$;
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha \cdot a_{i1} & \alpha \cdot a_{i2} & ... & \alpha \cdot a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{vmatrix}$, $1 \leq i \leq n$ (analog pentru coloane);

[5]pentru $A \in \mathcal{M}(n, K)$ spunem şi că $\det A$ este determinant de ordin n.

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{i1} + \lambda \cdot a_{j1} & ... & a_{in} + \lambda \cdot a_{jn} \\ ... & ... & ... \\ a_{j1} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$ pentru orice $1 \leq i, j \leq n$, $\forall \lambda \in K$ (analog pentru coloane);

- Pentru $A \in \mathcal{M}(n, K)$, au loc[6]:

  $\det A = a_{i1}\delta_{i1} + ... + a_{in}\delta_{in}$, pentru orice $1 \leq i \leq n$;

  $\det A = a_{1j}\delta_{1j} + ... + a_{nj}\delta_{nj}$, pentru orice $1 \leq j \leq n$;

- Pentru $A, B \in \mathcal{M}(n, K)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$.

Fie $A \in \mathcal{M}n, K$. Se spune că A este **matrice inversabilă** dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}(n, K)$ astfel încât$A \cdot B = B \cdot A = I_n$ (B este numită inversa lui A). Inversa unei matrice, dacă există, este unică şi va fi notată A^{-1}. Se cunoaşte că $A \in \mathcal{M}(n, K)$ este inversabilă dacă şi numai dacă $\det A \neq 0$, iar (în cazul în care există)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & ... & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & ... & \delta_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & ... & \delta_{nn} \end{pmatrix}$$

(se remarcă faptul că înlocuirea elementelor cu complemenţi algebrici se face în ${}^tA$).

Considerăm $A \in \mathcal{M}(m, n, K)$ şi fie k un număr natural $1 \leq k \leq \min(m, n)$.

Alegând, în A, k linii şi k coloane, elementele care se regăsesc la intersecţia acestor linii şi coloane formează o matrice pătratică de ordin k (submatrice a matricei A) al cărei determinant se numeşte **minor de ordin** k al matricei A.

Dacă $A \in \mathcal{M}(m, n, K)$ are şi elemente diferite de $0 \in K$, spunem că A are **rangul** r ($\text{rang}A = r$) dacă A admite un minor de ordin r nenul, iar toţi minorii lui A de ordin mai mare decât r (dacă există) sunt nuli[7] Evident,

[6] formulele de "dezvoltare după o linie", respectiv "dezvoltare după o coloană".

[7] Dacă A este matricea nulă ($a_{ij} = 0 \in K$, pentru orice $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$), convenim să spunem că $\text{rang}A = 0$.

este suficient (şi necesar) ca toţi minorii de ordin $r+1$ (dacă există) să fie nuli.

Sisteme de ecuaţii liniare

Fie sistemul

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ ... \\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_m, b_i, a_{ij}\in K, 1\le i\le m, 1\le j\le n. \end{cases}$$

Prin **soluţie** a sistemului se înţelege o n-uplă de elemente din K, $(\alpha_1,...,\alpha_n)$, care verifică ecuaţiile sistemului. Distingem: **sistem incompatibil** (nu admite nici o soluţie), **sistem compatibil determinat** (soluţie unică), **sistem compatibil nedeterminat** (o infinitate de soluţii).

Notăm $A=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn}\end{pmatrix}$ şi $\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m\end{pmatrix}$ (ultima coloană este numită coloana termenilor liberi)[8] şi se obţine:

- *Sistemul de ecuaţii liniare* (*) *este compatibil dacă şi numai dacă* $\mathrm{rang}A=\mathrm{rang}\overline{A}$(**teorema Kronecker - Capelli**).

  Dacă $\mathrm{rang}A=r$, alegând un minor de ordin r nenul (corespunzător unei submatrice a matricei A), vom numi **determinant caracteristic** (al sistemului dat) determinantul matricei obţinute prin bordarea submatricei alese (numită **submatrice principală**) cu o coloană alcătuită din elementele corespunzătoare liniilor submatricei respective din coloana termenilor liberi precum şi cu cele corespunzătoare ale uneia dintre liniile rămase (dacă există o astfel de linie). Se obţine:

- *In ipoteza* $\mathrm{rang}A<m$*, sistemul de ecuaţii* $(*)$ *este compatibil dacă şi numai dacă toţi determinanţii caracteristici sunt nuli* (**teorema Rouché**).

  Dacă $\mathrm{rang}A=m$ (avem şi $m\le n$), sistemul (*) este, evident, compatibil.

- In cazul $m=n$ şi $\det A\neq 0$, pentru rezolvare se poate aplica "regula Cramer":

[8] Liniile matricei A corespund ecuaţiilor sistemului, iar coloanele corespund necunoscutelor acestuia.

Dacă $m = n$ şi $\det A \neq 0$, atunci $(*)$ admite soluţie unică dată de $x_1 = \dfrac{d_1}{d}, ..., x_n = \dfrac{d_n}{d}$ unde $d = \det A$, iar d_i este determinantul matricei obţinute din matricea sistemului prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi.

In celelalte cazuri ($m \neq n$ sau $m = n$ şi $\det A = 0$), dacă sistemul este compatibil, se aleg ecuaţiile ce corespund liniilor submatricei principale şi se păstrează în membrul întâi necunoscutele ce corespund coloanelor submatricei principale (celelalte fiind trecute în membrul doi), obţinându-se un sistem ce poate fi rezolvat cu ajutorul regulii lui Cramer. Precizăm că acest sistem are exact aceleaşi soluţii cu sistemul iniţial[9].

Spaţii liniare

Fie $(K, +, \cdot)$ un corp comutativ.

Definiţia 2.1. *Un grup comutativ $(V, +)$[10] înzestrat cu o operaţie externă $\varphi : K \times V \to V$, $\varphi(\alpha, x) = \alpha x$, astfel încât:*

i) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

iii) $(\alpha \cdot \beta)x = \alpha(\beta x)$;

iv) $1x = x$

pentru orice $\alpha, \beta \in K (1 \in K)$ şi orice $x, y \in V$, este numit **spaţiu liniar** *peste K (sau $K-$***spaţiu liniar***). In cele ce urmează va fi considerat doar cazul "netrivial" $V \neq \{0\}$.*

Exemple:

i) Considerând, pentru cazul $(K, +, \cdot)$, grupul abelian $(K, +)$ şi operaţia externă dată de "$\cdot$", se obţine: K este spaţiu liniar peste K;

ii) Definind pe $K^n = K \times K \times ... \times K$ operaţiile $(\alpha_1, ..., \alpha_n) + (\beta_1, ..., \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ şi $\lambda(\alpha_1, ..., \alpha_n) = (\lambda \cdot \alpha_1, ..., \lambda \cdot \alpha_n)$, $\lambda \in K$, se obţine: K^n este spaţiu liniar peste K;

iii) $\mathcal{M}(m, n, K)$ este spaţiu liniar peste K (operaţiile fiind "+" şi produsul matricelor cu scalari);

---

[9] Dacă două sisteme de ecuaţii au exact aceleaşi soluţii se mai spune că sunt **sisteme echivalente** (se admite că toate sistemele incompatibile sunt echivalente între ele).

[10] Utilizarea notaţiei aditive nu poate produce confuzii (de exemplu, în ii), este evident că simbolul "+" din paranteză reprezintă operaţia din K, iar în membrul al doilea apare operaţia din V.

iv) Mulţimea polinoamelor de o nedeterminantă $K[X]$ are structură de spaţiu liniar peste K ("+" reprezintă suma uzuală de polinoame, iar, pentru $\lambda \in K$ şi $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i, \lambda f = \sum_{i=0}^{n} (\lambda \cdot a_i) X^i$).

v) Mulţimea polinoamelor de grad cel mult n, $K_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$ este spaţiu liniar peste K (operaţiile sunt precizate în exemplul iv)).

Observaţia 2.1. Pentru un spaţiu liniar, V, peste corpul K, avem:

i) $\alpha x = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ sau $x = 0$;

ii) $(-\alpha)x = -\alpha x = \alpha(-x); (-\alpha)(-x) = \alpha x$;

iii) $\alpha x = \beta x$, $x \neq 0 \Rightarrow \alpha = \beta$;

iv) $\lambda x = \lambda y$, $\lambda \neq 0 \Rightarrow x = y$.

Fie V un spaţiu liniar peste corpul K şi $S \subseteq V$. Dacă $S = \{x_1, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, şi din orice egalitate $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$, $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, rezultă $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci spunem că elementele $x_1, ..., x_n$ sunt **liniar independente** (sau că S este **(submulţime) liniar independentă**). Dacă S este infinită, atunci S va fi numită **submulţime liniar independentă** dacă orice submulţime finită a sa este liniar independentă. In caz contrar[11], spunem că S este **liniar dependentă**.

Precizăm şi că expresiile de forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ mai sunt numite **combinaţii liniare** de $x_1, ..., x_n \in V$.

Observaţia 2.2. i) Dacă $x \in V, x \neq 0$, atunci $S = \{x\}$ este liniar independentă;

ii) Dacă $0 \in S$, atunci S este liniar dependentă;

iii) Dacă S este liniar independentă, iar $S' \subseteq S$, atunci S' este liniar independentă;

iv) Dacă $S' \subseteq S$, iar S' este liniar dependentă, atunci S este liniar dependentă.

Dacă $\emptyset \neq M \subseteq V$, $M = \{x_1, ..., x_n\}, n \in \mathbb{N}^*$, spunem că M constituie un **sistem de generatori** pentru V dacă orice element $x \in V$ se poate exprima

[11]Dacă $S = \{x_1, ..., x_n\}$ atunci există $\alpha_i \in K$, $i = \overline{1,n}$ şi există cel puţin un indice i, $1 \leq i \leq n$, aşa încât $\alpha_i \neq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ (în cazul infinit, există cel puţin o submulţime finită liniar dependentă).

ca o combinaţie liniară de $x_1, ..., x_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. In cazul în care M este infinită se impune ca, pentru orice $x \in V$, să existe $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x_1, ..., x_n \in M$ astfel încât$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \alpha_i \in K, i = \overline{1, n}$.

Observaţia 2.3. Pentru orice spaţiu liniar V, mulţimea V constituie un sistem de generatori pentru V.

Definiţia 2.2. *O submulţime B a spaţiului liniar V peste K este numită* **bază** *a spaţiului V dacă:*

i) B este liniar independentă;

ii) B constituie un sistem de generatori.

Distingem cazurile când B este finită, respectiv infinită.

Teorema 2.1. *Orice spaţiu liniar admite o bază.*

Demonstraţie. Pentru exemplificare, vom demonstra teorema în cazul în care spaţiul liniar considerat admite un sistem finit de generatori. Fie, atunci, spaţiul liniar V şi $\{x_1, ..., x_n\}$[12] un sistem de generatori pentru V. Evident că există $x_i \neq 0$ şi, în consecinţă, $\{x_i\}$ constituie o submulţime liniar independentă. Fie B[13] o submulţime liniar independentă încât $B \subseteq \{x_1, ..., x_n\}$ şi B este maximală (relativ la incluziune) cu această proprietate. Prin eventuală renumerotare, obţinem $B = \{x_1, ..., x_m\}, m \leq n$. Este suficient să arătăm că B consituie un sistem de generatori. Intrucât B este maximală rezultă că, pentru orice $j, m < j \leq n$, sistemul $\{x_1, ..., x_m, x_j\}$ este liniar dependent, deci există $a_i \in K, i = \overline{1, m+1}$ încât $a_1 x_1 + ... + a_m x_m + a_{m+1} x_j = 0$ şi $a_{m+1} \neq 0$ (altfel, se contrazice faptul că B este liniar independentă). Altfel spus, x_j poate fi reprezentat ca o combinaţie liniară de elementele din B. Intrucât $\{x_1, ..., x_n\}$ este sistem de generatori pentru V, rezultă că B satisface aceeaşi condiţie (în reprezentarea oricărui element $x \in V$ se înlocuiesc $x_j, m < j \leq n$ prin combinaţiile liniare de $x_1, ..., x_m$). ■

Dacă spaţiul vectorial V peste K admite o bază finită spunem că V este K-**spaţiu liniar finit generat**.

Demonstraţia teoremei anterioare conduce imediat la:

Observaţia 2.4. Intr-un K-spaţiu liniar finit generat, din orice sistem de generatori se poate extrage o bază.

[12] Avem şi $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n$.

[13] Existenţa lui B pentru cazul considerat este evidentă.

Observaţia 2.5. Dacă $B = \{e_1, ..., e_n\}$ este o bază în V atunci orice $x \in V$ se exprimă în mod **unic** ca o combinaţie liniară de elementele $e_1, ..., e_n$.

Intr-adevăr, dacă $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i, \alpha_i, b_i \in K,\ i = \overline{1,n}$, atunci $\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0$ şi deci $\alpha_i = \beta_i,\ \forall i = \overline{1,n}$. In acest context, dacă $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \alpha_i \in K, i = \overline{1,n}$, atunci elementele $\alpha_1, ..., \alpha_n$ se numesc **coordonatele lui** x **în raport cu baza** $e_1, ..., e_n$.

Remarcăm şi faptul că în ipoteza "B sistem finit de generatori pentru V", condiţia de unicitate a coordonatelor este echivalentă cu condiţia ca B să fie bază.

Exemple:

i) $(1, 0, ..., 0), (0, 1, ..., 0), ..., (0, 0, ..., 1)$ constituie o bază în spaţiul liniar K^n;

ii) Polinoamele $1, X, X^2, ...$ constituie o bază în spaţiul liniar $K[X]$;

iii) Polinoamele $1, X, X^2, ..., X^n$ consituie o bază în spaţiul liniar $K_n[X]$;

iv) Matricele $E_{k\ell} = (e_{ij})_{m \times n}, e_{ij} = \begin{cases} 1; & i = k, j = \ell \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$ $1 \leq k \leq m, 1 \leq \ell \leq n$ constituie o bază în spaţiul liniar $\mathcal{M}(m, m, K)$.

Bazele date în exemplele anterioare sun numite **baze canonice** (ale spaţiilor liniare considerate).

Teorema 2.2. *Intr-un K-spaţiu liniar finit generat orice două baze au acelaşi număr de elemente.*

Demonstraţie. Vom arăta că, dacă fiecare element al sistemului liniar independent $\{e_1, ..., e_m\}$ este combinaţie liniară de elementele $f_1, ..., f_n$, atunci $m \leq n$. Demonstraţia se face prin inducţie matematică după numărul m.

Pentru $m = 1$, afirmaţia este evident adevărată.

Presupunem afirmaţia adevărată pentru orice sitem liniar independentavând $r < m$ elemente. Fie sistemul $\{e_1, ..., e_m\}$. Avem că $e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j, i = \overline{1,m}$, unde $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ şi cel puţin un element $a_{ij} \neq 0$. Presupunem (eventual renumerotând) că $a_{11} \neq 0$. Notăm atunci $e'_i = e_i - (a_{i1} \cdot a_{11}^{-1}) e_i, i = \overline{2,m}$, şi obţinem sistemul $\{e'_2, ..., e'_m\}$, fiecare element al său fiind exprimat ca o combinaţie liniară de $f_2, ..., f_n$.

Dacă $\lambda_2, ..., \lambda_m \in K$ şi $\lambda_2 e'_2 + ... + \lambda_m e'_m = 0$ atunci, înlocuind $e'_i = e_i - (a_{i1} \cdot a_{11}^{-1}) e_1$, $i = \overline{2, m}$, se obţine din liniara independenţă a sistemului $\{e_1, ..., e_m\}, \lambda_2 = ... = \lambda_m = 0$, deci $\{e'_2, ..., e'_m\}$ constituie un sistem liniar independent.

Conform ipotezei inductive, rezultă $m - 1 \leq n - 1$ deci $m \leq n$.

Dacă $\{e_1, ..., e_m\}$ şi $\{f_1, ..., f_n\}$ constituie baze, atunci $m \leq n$ şi $n \leq m$, deci $m = n$. ■

Reformulând, putem spune că, dacă spaţiul liniar V peste K admite o bază având n elemente, atunci orice altă bază va avea, de asemenea, n elemente. Teorema anterioară conduce la următoarea definiţie:

Definiţia 2.3. *Dacă V este un K-sistem liniar finit generat, numim* **dimensiune a spaţiului** *V (şi notăm $\dim V$) numărul elementelor unei baze a lui V.*

Dacă spaţiul liniar V peste K nu este finit generat vom scrie $\dim V = \infty$. Convenim şi că, pentru cazul $V = \{0\}, \dim V = 0$.

Exemple:

i) $\dim K^n = n$;

ii) $\dim K[X] = \infty$;

iii) $\dim K_n[X] = n + 1$;

iv) $\dim \mathcal{M}(m, n, K) = m \cdot n$.

Demonstraţia teoremei 2.2 conduce la următoarea observaţie:

Observaţia 2.6. Intr-un K-spaţiu liniar finit generat orice submulţime liniar independentă se poate completa până la o bază.

Demonstraţie. Remarcăm mai întâi (conform demonstraţiei teoremei 2.2) că în spaţiul liniar (V) dat (având dimensiunea n), submulţimile liniar independente pot avea cel mult n elemente. Fie $\{x_1, ..., x_r\}$, $r \leq n$, o submulţime liniar independentă şi $e_1, ..., e_n$ o bază. Dacă $r = 1$, $x_1 = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ şi $\exists i, 1 \leq i \leq n$ încât $\alpha_i \neq 0$. Presupunem (eventual renumerotând) că $\alpha_1 \neq 0$. Se verifică atunci faptul că $\{x_1, e_2, ..., e_n\}$ constituie o bază în V: e_1 se exprimă ca o combinaţie liniară de $x_1, e_2, ..., e_n$, deci $\{x_1, e_2, ..., e_n\}$ constituie un sistem de generatori iar, dacă presupunem că $\{x_1, e_2, ..., e_n\}$ sunt liniar dependenţi, rezultă că $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sunt liniar dependenţi, ceea ce este fals.

Procedând inductiv, având $\{x_1, ..., x_r\}$ liniar independenţi, folosind faptul că $\{x_1, ..., x_{r-1}\}$ sunt, de asemenea, liniar independenţi se obţine că $\{x_1, ..., x_{r-1}, \ e_r, ..., e_n\}$ constituie o bază şi apoi repetând cazul $r = 1$ se obţine ceea ce trebuia demonstrat. ■

Reformulând, putem spune că: *într-un K-spaţiu liniar finit generat, dacă $\{x_1, ..., x_r\}$ este submulţime liniar independentă, iar $\{y_1, ..., y_n\}$ constituie un sistem de generatori, atunci $r \leq n$ şi, după o eventuală renumerotare, $\{x_1, ..., x_r, y_{r+1}, ..., y_n\}$ constituie un sistem de generatori.* Acest enunţ este cunoscut sub numele de **teorema schimbului (sau teorema Steinitz)**.

Enunţăm fără demonstraţie (rezultă uşor din cele precedente) o propoziţie utilă în exerciţii:

Propoziţia 2.1. *Fie V un K-spaţiu liniar de dimensiune n şi $B = \{e_1, ..., e_n\} \subseteq V$ (submulţime având n elemente). Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) B este bază;

ii) B este liniar independentă;

iii) B constituie sistem de generatori.

Fie V un spaţiu liniar de dimensiune n peste un corp K şi $B = \{e_1, ..., e_n\}$, $B' = \{e'_1, ..., e'_n\}$ două baze ale sale.

Folosind faptul că B este bază, putem scrie

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \ i = \overline{1, n}$$

punând astfel în evidenţă o matrice[14] (unică)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(n, K)$$

numită matricea de trecere de la baza B la baza B'.

Notând $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}$, $e' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix}$, putem scrie (formal) $e' =^t A \cdot e$ (această relaţie este numită formula de trecere de la baza B la baza B').

Fie $x \in V$ încât $x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ şi $x = \alpha'_1 e'_1 + ... + \alpha'_n e'_n$. Avem $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha'_i a_{ji} \right) e_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j = x$. Coordonatele oricărui element într-o bază dată fiind unic determinate, rezultă

[14] A fost folosit primul indice (pentru a_{ji}) ca indice de sumare, iar coloanele din A conţin coordonatele elementelor e'_i, $i = \overline{1, n}$. Rezultatele similare se obţin folosind cel de-al doilea indice ca indice de sumare.

$\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_j a_{ji}$, $i = \overline{1,n}$ adică (sub formă matricială) $\alpha = A \cdot \alpha'$, unde $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, $\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}$.

Această ultimă relaţie este numită **formula de transformare a coordonatelor**.

Propoziţia 2.2. *fie V un K-sistem liniar de dimensiune n. Pentru orice baze B şi B' ale lui V, matricea de trecere de la baza B la baza B' este matrice inversabilă.*

Demonstraţie. Remarcăm întâi (după calcule simple) că, în general, fiind date bazele B, B', B'' în V, având A matricea de trecere de la B la B', A' matricea de trecere de la B' la B'' şi A'' matricea de trecere de la B la B'', obţinem $A \cdot A' = A''$.

Pentru $B'' = B$, obţinem evident $A'' = I_n$, deci matricea A este inversabilă. ∎

Având în vedere rezultatul anterior, putem scrie

$$\alpha' = A^{-1} \cdot \alpha \text{ şi } e =^t A^{-1} \cdot e'.$$

Subspaţii liniare

Fie V un K-spaţiu liniar. O submulţime nevidă $U \subseteq V$ se numeşte **subspaţiu liniar** al lui V dacă

i) pentru orice $x, y \in U$, $x + y \in U$;

ii) pentru orice $x \in U$ şi orice $\alpha \in K$, $\alpha x \in U$.

Observaţia 2.7. Condiţiile definiţiei asigură faptul că restricţiile operaţiilor K-spaţiului liniar V determină pe U o structură de K-spaţiu liniar (U este subgrup al grupului V, iar operaţia externă este dată de asocierea corespunzătoare pentru V).

Exemple:

i) $\{0\} \subset V$ constituie subspaţiu liniar (numit **subspaţiul nul**) al spaţiului liniar V;

ii) Submulţimile $K \times 0 = \{(x,0) \mid x \in K\}$ şi $0 \times K = ((0,y) \mid y \in K)$ sunt subspaţii liniare ale K-spaţiului liniar K^2;

iii) Dacă $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq V$, atunci $\{a_1 x_1 + ... + a_n x_n \mid a_i \in K, i = \overline{1,n}\}$ constituie subspaţiu liniar (va fi notat $L(x_1, ..., x_n)$) al lui V.

Dacă $e_1, ..., e_n$ este o bază a K-spaţiului liniar V, atunci $L(e_1, ..., e_n) = V$. Folosind teorema schimbului, deducem:

Propoziţia 2.3. *Dacă* $U \neq \{0\}$ *este subspaţiu liniar al unui* K*-spaţiu liniar* V *de dimensiune* n*, atunci* U *este finit generat şi* $\dim U \leq n$.

Demonstraţie. Intr-adevăr, în V, deci şi în U, orice $n+1$ elemente constituie o submulţime liniar dependentă, iar o submulţime liniar independentă maximală din U este şi bază în U. ■

Mai mult, avem $\dim U = n$ dacă şi numai dacă $U = V$. Rafinând acest rezultat obţinem:

Propoziţia 2.4. *Dacă* U_1 *şi* U_2 *sunt subspaţii ale* K*-spaţiului liniar finit generat* V*,* $U_1 \subseteq U_2$ *şi* $\dim U_1 = \dim U_2$ *atunci* $U_1 = U_2$.

Demonstraţie. Din $U_1 \subseteq U_2$ şi $\dim U_1 = \dim U_2$ rezultă că orice bază din U_1 este şi bază în U_2, deci $U_1 = U_2$. ■

Fie V un K-spaţiu liniar şi U_1, U_2 subspaţii ale lui V. Cu subspaţiile liniare ale unui K-spaţiu liniar se pot efectua operaţii printre care se disting "**intersecţia**" şi "**suma**" de subspaţii:

- Intersecţia $U_1 \cap U_2$ este subspaţiu liniar în V;
- $U_1 + U_2 = \{x + y \mid x \in U_1, y \in U_2\}$ constituie un subspaţiu liniar în V.

  Se remarcă uşor că au loc:

  i) $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_1$;

  ii) $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$;

  iii) $(U_1 \cap U_2) \cap U_3 = U_1 \cap (U_2 \cap U_3)$;

  iv) $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$.

Propoziţia 2.5. *Dacă* U_1 *şi* U_2 *sunt subspaţii liniare ale unui* K*-spaţiu liniar* V*, finit generat, atunci*

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Demonstraţie. In cazul $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, fie $b_1, ..., b_m; c'_1, ..., c'_r$ baze în U_1, respectiv U_2. Prin calcule simple se deduce că $b_1, ..., b_m, c'_1, ..., c'_r$ constituie o bază în V.

In cazul $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$, fie $a_1, ..., a_s$ o bază în $U_1 \cap U_2$.

Intrucât $U_1 \cap U_2 \subseteq U_1$, $U_1 \cap U_2 \subseteq U_2$, $\{a_1, ..., a_s\}$ poate fi completată, obţinându-se $a_1, ..., a_s$, $b_{s+1}, ..., b_m$ bază în U, şi $a_1, ..., a_s$, $c_{s+1}, ..., c_r$ bază în U_2 (conform propoziţiei 2.3, $m \geq s, r \geq s$).

Prin calcule simple se deduce că $a_1, ..., a_s$, $b_{s+1}, ..., b_m$, $c_{s+1}, ..., c_r$ constituie o bază în V. ■

In cazul în care $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, suma $U_1 + U_2$ mai este numită **sumă directă a subspaţiilor liniare** U_1 şi U_2 şi este notată $U_1 \oplus U_2$.

Observaţia 2.8. i) In cazul $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$, dacă $x \in U_1 \cap U_2 \setminus \{0\}$, atunci orice element $z \in U_1 + U_2$, $z = z_1 + z_2$, $z \in U_1, z_2 \in U_2$ poate fi scris şi sub forma $z = (z_1 - x) + (x + z_2)$, altfel spus, reprezentarea elementelor din $U_1 + U_2$ ca sumă, $z = z_1 + z_2$, $z_1 \in U_1, z_2 \in U_2$, nu este unică;

ii) orice element $z \in U_1 \oplus U_2$ poate fi scris în mod unic sub forma $z = z_1 + z_2, z_1 \in U_1, z_2 \in U_2$.

In adevăr, din $z_1 + z_2 = z_1' + z_2'$, $z_1, z_1' \in U, z_2, z_2' \in U_2$ rezultă $z_1 - z_1' = z_2' - z_2 = 0$ deoarece $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, adică $z_1 = z_1', z_2 = z_2'$.

Observaţia 2.9. Dacă U_1, U_2 sunt subspaţii liniare ale unui K-spaţiu liniar finit generat, atunci $\dim U_1 \oplus U_2 = \dim U_1 + \dim U_2$. Mai mult, $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ dacă şi numai dacă $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$. In ceea ce priveşte reuniunea de subspaţii, se arată uşor că $U_1 \cup U_2$ este subspaţiu liniar dacă şi numai dacă $U_1 \subseteq U_2$ sau $U_2 \subseteq U_1$.

Operaţiile "intersecţie" şi "sumă" se pot extinde, în general, pentru familii de subspaţii liniare ale unui aceluiaşi K-spaţiu liniar.

Fie $\{U_i\}_{i \in I}$ o familie de subspaţii liniare ale K-spaţiului liniar V.

- $\bigcap\limits_{i \in I} U_i$ este subspaţiu liniar în V;
- $\sum\limits_{i \in I} U_i = \left\{ \sum\limits_{j=1}^{n} x_{\alpha_j} \mid \alpha_j \in I, x_{\alpha_j} \in U_{\alpha_j}, j = \overline{1,n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$[15] este subspaţiu liniar în V.

Verificarea condiţiilor de subspaţiu liniar este propusă ca un simplu exerciţiu.

[15] Orice $x \in \sum\limits_{i \in I} U_i$ se reprezintă ca sumă finită de elemente din subspaţiile liniare $U_i, i \in I$.

Prima aserţiune conduce la noţiunea de subspaţiu liniar generat de o submulţime a spaţiului liniar considerat: pentru un K-spaţiu liniar$V$ şi $X \subseteq V$, intersecţia familiei subspaţiilor liniare ale lui V ce includ X poartă numele de **subspaţiu liniar generat de** X (notăm $< X >$).

Observaţia 2.10. i) $L(a_1, ..., a_n) =< \{a_1, ..., a_n\} >$;

ii) $U_1 + U_2 =< U_1 \cup U_2 >$.

In ceea ce priveşte $\sum\limits_{i \in I} U_i$, limitându-ne, pentru simplitate, la cazul $I = \{1, 2, ..., n\}$, vom spune că, în cazul în care pentru orice $i, 1 \leq i \leq n, U_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j \right) = \{0\}$, subspaţiul liniar $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i$ este **suma directă a familiei subspaţiilor** U_i, $i = \overline{1, n}$ (notăm $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i$).

Pentru $n = 2$ se obţine suma directă a subspaţiilor U_1, U_2. Mai mult $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_1$ se obţine inductiv, remarcând întâi că $U_1 \oplus U_2 = U_2 \oplus U_1$ şi $(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 = U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)$.

Propoziţia 2.6. *Fie $U_1, ..., U_n$ subspaţii liniare ale K-spaţiului liniar V. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i) $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i$;

ii) dacă $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, *unde* $x_i, y_i \in U_i, i = \overline{1, n}$, *atunci* $x_i = y_i$ *pentru orice* $i = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. i) $\Rightarrow$ ii) Din $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i$ rezultă $x_i - y_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (y_j - x_j)$, iar $x_i - y_i \in U_i$, $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (y_j - x_j) \in \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j$ deci $x_i = y_i$, $\forall i, 1 \leq i \leq n$.

ii) $\Rightarrow$ i) Presupunând că $\exists i, 1 \leq i \leq n$, astfel încât$\exists x \in U_i \cap \left(\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j \right)$ şi

$x \neq 0$, atunci, din $x \in \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_i$, rezultă $x = y_1 + ... + y_{i-1} + y_{i+1} + ... + y_n$ şi deci $y_1 + ... + y_{i-1} + (-x) + y_{i+1} + ... + y_n = 0 + ... + 0$ fără ca $-x = 0$, ceea ce este fals. ∎

Observaţia 2.11. $\{a_1, ..., a_n\}$ constituie o submulţime liniar independentă a unui K-spaţiu liniar$V$ dacă şi numai dacă $L(a_1, ..., a_n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L(a_i)$.

Propoziţia 2.7. *Dacă $U_1, ..., U_n$ sunt subspaţii liniare ale K-spaţiului liniar finit generat V, atunci $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i$ dacă şi numai dacă* $\dim \sum\limits_{i=1}^{n} U_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \dim U_i$.

Demonstraţie. Dacă $m = 2$, obţinem în mod evident că $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

Dacă $U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j = \{0\}$ atunci $\dim \left(U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j \right) = 0$, deci $\dim \sum\limits_{i=1}^{n} U_i = \dim U_i + \dim \left(\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j \right)$[16]. Arătând că $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j = \bigoplus\limits_{\substack{j=1\\a\neq i}}^{n} U_j$ va rezulta, aplicând metoda inducţiei matematice, ceea ce trebuia demonstrat.

Dar $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} x_j = \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} y_j \Rightarrow x_1 + ... + x_{i-1} + 0 + x_{i+1} + ... + x_n = y_1 + ... + y_{i-1} + 0 + y_{i+1} + ... + y_n$ deci $x_j = y_j$ pentru orice $j = \overline{1, n}, j \neq i$, adică $\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j = \bigoplus\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j$.

Reciproc $\dim \left(U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j \right) = 0 \Rightarrow U_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j = \{0\}$, pentru orice $i = \overline{1, n}$.

[16] S-a ţinut cont că $U_i + \sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} U_j = \sum\limits_{j=1}^{n} U_j$.

Conchidem că $\sum_{i=1}^{n} U_i = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$. ∎

Operatori liniari

Fie V şi W spaţii liniare peste acelaşi corp comutativ K.

Definiţia 2.4. *O aplicaţie* $\varphi : V \to W$ *se numeşte* **operator liniar** *(de la* V *la* W*) dacă satisface condiţiile:*

i) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$*, oricare ar fi* $x, y \in V$*;*

ii) $\varphi(xy) = \alpha\varphi(x)$*, oricare ar fi* $\alpha \in K$ *şi* $x \in V$*.*

Observaţia 2.12. Condiţiile din definiţie sunt, în mod clar, echivalente cu condiţia: $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)$ oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ şi $x, y \in V$.

Exemple:

i) Aplicaţia identitate $1_V : V \to V$ este operator liniar (**operatorul liniar identitate**);

ii) Aplicaţia $0 : V \to W$ $0(x) = 0, \forall x \in V$, este operator liniar (**operatorul liniar nul**);

iii) Aplicaţia $\varphi : K[X] \to K[X]$, $\varphi(f) = f'$, unde, pentru $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $f'(X) = \sum_{k=1}^{n} (ka_k) X^{k-1}$, iar $ka_k = \underbrace{a_k + ... + a_k}_{k\ ori}$, este operator liniar (**operatorul liniar de derivare**).

Observaţia 2.13. i) Notând $\mathcal{L}(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ operator liniar}\}$ şi definind $f + g, \lambda f, (\lambda \in K)$ prin $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, obţinem că $\mathcal{L}(V, W)$ este K-spaţiu liniar;

ii) remarcând întâi că, prin compunerea a doi operatori liniari ($f : V \to W, h : W \to Y$, se obţine un operator liniar ($h \circ f : V \to Y$)) şi notând $\mathcal{L}(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ operator liniar}\}$, obţinem că $\mathcal{L}(V)$ împreună cu operaţia "+" definită anterior şi cu operaţia de compunere are structură de inel unitar.

Dacă $\varphi : V \to W$ este, în plus, injectivă (surjectivă) atunci spunem că avem un **operator liniar injectiv (surjectiv)**.

Observaţia 2.14. i) Dacă $\varphi : V \to W$ este operator liniar, atunci submulţimea $\ker\varphi = \{x \in V \mid \varphi(x) = 0\}$ este subspaţiu liniar în V. φ este operator liniar injectiv dacă şi numai dacă $\ker\varphi = \{0\}$;

ii) dacă $\varphi : V \to W$ este operator liniar, atunci submulţimea $\text{Im}\varphi = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$ este subspaţiu liniar în W. φ este operator liniar surjectiv dacă şi numai dacă $\text{Im}\varphi = W$.

Propoziţia 2.8. *Dacă V, W sunt K-spaţii liniare finit generate, iar $\varphi : V \to W$ este operator liniar atunci:*

$$\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi).$$

Demonstraţie. Propoziţia 2.3 asigură faptul că subspaţiile $\ker\varphi$ şi $\mathrm{Im}\varphi$ sunt finit generate.

Fie $e_1, ..., e_r$ o bază în $\ker\varphi$. Observaţia 2.6 asigură faptul că există $e_{r+1}, ..., e_n$ astfel încât$e_1, ..., e_r, e_{r+1}, ..., e_n$ să constituie o bază în V. Se arată uşor că $\{\varphi(e_{r+1}), ..., \varphi(e_n)\}$ este liniar independentă şi constituie un sistem de generatori pentru $\mathrm{Im}\varphi$. Avem atunci $n = r + (n - r)$ adică $\dim V = \dim(\ker\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi)$. In cazul $\ker\varphi = \{0\}$, dacă $e_1, ..., e_n$ este bază în V, atunci $\varphi(e_1), ..., \varphi(e_n)$ este bază în $\mathrm{Im}\varphi$. In cazul în care $\mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$ adică φ este operatorul liniar nul, este evident că $V = \ker\varphi$. ■

Definiţia 2.5. *Un operator liniar $\varphi : V \to W$ este numit* **izomorfism de spaţii liniare** *dacă există un operator liniar $\varphi' : W \to V$ astfel încât$\varphi \circ \varphi' = 1_W, \varphi' \circ \varphi = 1_V$ (în acest caz spunem că V şi W sunt izomorfe şi notăm $V \simeq W$).*

Propoziţia 2.9. *Un operator liniar $\varphi : V \to W$ este izomorfism dacă şi numai dacă aplicaţia φ este bijectivă.*

Demonstraţie. Este clar că în ipoteza φ izomorfism rezultă φ bijectivă.

Reciproc, fie ψ inversa aplicaţiei φ. Este suficient să arătăm că ψ este operator liniar. Dacă $y_1, y_2 \in W$, atunci $y_1 + y_2 = 1_W(y_1 + y_2) = \varphi(\psi(y_1 + y_2))$ şi $y_1 + y_2 = 1_W(y_1) + 1_W(y_2) = \varphi(\psi(y_1)) + \varphi(\psi(y_2))$. Rezultă $\psi(y_1 + y_2) = \psi(y_1) + \psi(y_2)$. In mod analog, se arată că $\psi(\alpha y) = \alpha\psi(y)$. ■

Teorema 2.3. *Fie V, W două spaţii liniare finit generate. Atunci $V \simeq W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.*

Demonstraţie. "$\Rightarrow$" Dacă $\varphi : V \to W$ este izomorfism atunci $\ker\varphi = \{0\}$ şi $\mathrm{Im}\varphi = W$. Conform propoziţiei 2.8, rezultă $\dim V = \dim W$.

"$\Leftarrow$" Fie $e_1, ..., e_n$ bază în V şi $f_1, ..., f_n$ bază în W. Definim $\varphi : V \to W$ în modul următor: dacă $x \in V, x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ atunci $\varphi(x) = \alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$. Se dovedeşte (prin verificare directă) că φ este operator liniar injectiv şi surjectiv deci izomorfism. ■

Consecinţa 2.1. *Orice K-spaţiu liniarde dimensiune n este izomorf cu spaţiul liniar K^n.*

O caracterizare a izomorfismelor de spaţii liniare de aceeaşi dimensiune finită este dată în propoziţia următoare.

Propoziţia 2.10. *Fie* V, W *două* K*-spaţii liniare având* $\dim V = \dim W = n$ *şi* $: V \to W$ *un operator liniar. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

i) f *este injectiv;*

ii) f *este surjectiv;*

iii) f *este izomorfism.*

Demonstraţie. Conform propoziţiei 2.8, $\dim \ker f + \dim \mathrm{Im} f = \dim V$. Dacă f este injectiv, atunci $\ker f = \{0\}$ şi deci $\mathrm{Im} f = \dim V = \dim W$. Folosind propoziţia 2.5 se deduce $\mathrm{Im} f = W$, adică f este surjectiv. In acelaşi mod se arată că, dacă f este surjectiv atunci f este injectiv. ■

Fie V, W K-spaţii liniare finit generate, $\dim V = m, \dim W = n$, $f : V \to W$ un operator liniar şi $B = \{e_1, ..., e_m\}$, $B' = \{f_1, ..., f_n\}$ baze în V, respectiv W. Avem:

$$f(e_1) = \alpha_{11} f_1 + \alpha_{21} f_2 + ... + \alpha_{n1} f_n;$$

$$...............$$

$$f(e_m) = \alpha_{1m} f_1 + \alpha_{2m} f_2 + ... + \alpha_{nm} f_n,$$

iar matricea

$$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12} & ... & \alpha_{1m} \\ ... & ... & ... \\ \alpha_{n1}\alpha_{n2} & ... & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

este numită **matricea operatorului** f **în perechea de baze** (B, B').

Având în vedere faptul că pentru $x \in V, x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_1$, iar $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$, se deduce f este "unic determinat" de $M_{BB'}(f)$. In acest context se obţine:

Propoziţia 2.11. *Fie* V *şi* W K*-spaţii liniare având* $\dim V = m, \dim W = n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$. *Atunci spaţiile liniare* $\mathcal{L}(V, W)$ *şi* $\mathcal{M}(n, m, K)$ *sunt izomorfe.*

Demonstraţie. Considerăm baza $B = \{e_1, ..., e_m\}$ în V şi baza $B' = \{f_1, ..., f_n\}$ în W.

Definim $\varphi : \mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}(n, m, K)$ prin $\varphi(f) = M_{BB'}(f)$. Prin calcul se deduce că $M_{BB'}(f + g) = M_{BB'}(f) + M_{BB'}(g)$, $M_{BB'}(\alpha f) = \alpha M_{BB'}(f)$ deci φ este operator liniar. Dacă $\varphi(f) = \varphi(g)$, atunci, presupunând $M_{BB'}(f) =$

$(\alpha_{ij})_{n\times m}$, $M_{BB'}(g) = (\beta_{ij})_{n\times m}$, rezultă

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} f_i = g(e_j),\ j = \overline{1,m}$$

şi în consecinţă $f(x) = g(x)$, $\forall x \in V$, adică φ este injectivă.

Dacă $M = (a_{ij})_{n\times m} \in \mathcal{M}(n, m, K)$, se consideră $f : V \to W$ dat prin $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i$, $j = \overline{1,m}$, iar pentru $x \in V, x = \sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j$, $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j f(e_j)$. Este clar că f este operator liniar şi $M_{BB'}(f) = M$, deci φ este surjectivă. ■

Pe parcursul demonstraţiei anterioare a fost evidenţiat faptul că, pentru o pereche de baze precizate, matricea sumei a doi operatori $f, g \in \mathcal{L}(V, W)$ este egală cu suma matricelor corespunzătoare operatorilor f şi respectiv g. In cazul operatorilor liniari $f : V \to W, h : W \to Y$ unde V, W, Y sunt K-spaţii liniare, $\dim V = m$, B este o bază în V, $\dim W = n$, B' este o bază în W, $\dim Y = p$, B'' este o bază în Y, are loc[17]:

Observaţia 2.15. $M_{BB''}(h \circ f) = M_{B'B''}(h) \cdot M_{BB'}(f)$.

Această observaţie conduce imediat la:

Propoziţia 2.12. *Dacă V este K-spaţiu liniarde dimensiune m, atunci există un izomorfism de inele între $\mathcal{L}(V)$ şi $\mathcal{M}(m, K)$.*

Drept consecinţă se obţine:

Consecinţa 2.2. *Dacă V este K-spaţiu liniar finit generat, iar B este o bază în V atunci operatorul liniar $f \in \mathcal{L}(V)$ este izomorfism dacă şi numai dacă $M_{BB}(f)$ este inversabilă.*

In consideraţiile anterioare, spaţiile liniare finit generate au fost presupuse ca fiind înzestrate cu o (anumită) bază fixată. Aceasta, nefiind supusă unor restricţii, se deduce că enunţurile date au loc pentru orice baze s-ar alege în spaţiile considerate. Pe de altă parte, apare în acest context problema schimbării matricei unui operator liniar în cazul schimbării bazelor în spaţiile considerate.

Fie V şi W K-spaţii liniare având $\dim V = m, \dim W = n$, $B_1 = \{e_1, ..., e_m\}$, $B_2 = \{e'_1, ..., e'_m\}$, baze în V, $B'_1 = \{f_1, ..., f_n\}$, $B'_2 = \{f'_1, ..., f'_n\}$, baze în W. Notăm $A = (a_{ij})_{m\times n}$ matricea de trecere de la baza B_1 la baza B_2 şi $A' = (a'_{ij})_{n\times n}$ matricea de trecere de la baza B'_1 la baza B'_2.

[17] verificarea este propusă ca exerciţiu

Fie $f : V \to W$ un operator liniar. Prin calcul se deduce formula de schimbare a matricei unui operator la schimbarea bazelor: $M_{B_2B_2'}(f) = (A')^{-1} \cdot M_{B_1B_1'}(f) \cdot A$.

Intr-adevăr, dacă $M_{B_1B_1'}(f) = (\alpha_{ij})_{n\times m}$, $M_{B_2B_2'}(f) = (\beta_{ij})_{n\times m}$,

$$f(e_j') = f\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}e_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}f(e_k) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\cdot\left(\sum_{l=1}^{n}\alpha_{lk}f_l\right) =$$

$$\sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\alpha_{lk}a_{kj}\right)f_l,\ j=\overline{1,m}$$

şi

$$f(e_j') = \sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}f_j' = \sum_{k=1}^{n}\beta_{kj}\left(\sum_{l=1}^{n}a_{lk}'f_l\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{lk}'\beta_{kj}\right)f_l,\ j=\overline{1,m}.$$

Rezultă:

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_{lk}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n}a_{lk}'\beta_{kj},\ l=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

deci $A'\cdot M_{B_2B_2'}(f) = M_{B_1B_1'}(f)\cdot A$, unde A' (şi A) este inversabilă.

Conexiunile dintre proprietăţile operatorilor liniari şi cele ale matricelor asociate sunt evidenţiate şi de următorul rezultat (ce se va dovedi util în paragraful următor).

Propoziţia 2.13. *Fie V un K-spaţiu liniar,* $\dim V = n, g : V \to V$ *operator liniar astfel încât* $\exists m\in\mathbb{N}^*$ *încât* $\underbrace{(g\circ g\circ ...\circ g)}_{m}(x) = 0$, $(g^m(x)=0)$ $\forall x\in V$. *Atunci există o bază B în V aşa încât*

$$M_{BB}(g) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & ... & 0 \\ & \vdots & & ... & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon_k\in\{0,1\},\ k=\overline{0,n-1}.$$

Demonstraţie. Din implicaţia $g^k(x)=0 \Rightarrow g^{k+1}(x) = g(g^k(x)) = 0$ rezultă incluziunile (*) $\{0\}\subseteq \ker g\subseteq \ker g^2 \subseteq ... \subseteq \ker g^{p-1}\subseteq \ker g^p = V$ unde $p = \min\{m \mid g^m(x)=0,\ \forall x\in V\}$.

Din minimalitatea lui p rezultă că incluziune $\ker g^{p-1} \subseteq \ker g^p$ este strictă. Dacă avem o bază B_{p-1} în $\ker g^{p-1}$, atunci aceasta poate fi completată până la o bază B_p în $\ker g^p$, anume $B_p = \{x_1, ..., x_k\} \cup B_{p-1}$. Notăm $S_1 = \{x_1, ..., x_k\}$. Se verifică uşor că $g(S_1) = \{g(x_1), ..., g(x_k)\}, ..., g^{p-1}(S_1) = \{g^{p-1}(x_1), ..., g^{p-1}(x_k)\}$ sunt liniar independente şi

$$\begin{cases} g(S_1) \subset \ker g^{p-1} \setminus \ker g^{p-2} \\ ... \\ g^{p-1} \subset \ker g \setminus \{0\} \end{cases}$$

Se deduce astfel că toate incluziunile (*) sunt stricte. In continuare, dacă avem o bază B_{p-2} în $\ker g^{p-2}$, aceasta se va completa până la o bază B_{p-1} în $\ker g^{p-1}$ luând mai întâi $g(S_1)$, adică $B_{p-1} = g(S_1) \cup B_{p-2} \cup S_2$, unde $S_2 = \{y_1, ..., y_e\}$ sau $S_2 = \emptyset$.

Procedeul se continuă din aproape în aproape până se ajunge la $\ker g$ unde este necesar să construim o bază $B_1 = g^{p-1}(S_1) \cup g^{p-2}(S_2) \cup ... \cup g(S_{p-1}) \cup S_p$ unde S_i, $i = \overline{2, p-1}$, sunt obţinute prin procedeul anterior (putem avea şi $S_i = \emptyset$), iar $S_p = \{v_1, ..., v_i\}$ sau $S_p = \emptyset$.

Se verifică faptul că $B = \{g^{p-1}(x_1), g^{p-2}(x_1), .., g(x_1), x_1, g^{p-2}(x_2), ..., g(x_2), x_2, ..., g^{p-1}(x_k), ..., g(x_k), x_k, g^{p-2}(y_1), ..., g(y_1), y_1, .., g^{p-2}(y_e), ..., y_e, ..., v_1, v_2, ..., v_t\}$ constituie o bază[18] în V.

Matricea lui g va avea forma din enunţ. ■

2.1 Subspaţii invariante

Fie V un K-spaţiu liniarşi $f : V \to V$ un operator liniar.

Un subspaţiu liniar U al K-spaţiului liniar V este numit **subspaţiu invariant** relativ la operatorul liniar f dacă $\forall x \in U$, $f(x) \in U$ (astfel spus, $f(U) \subseteq U$).

Exemple:

i) $\ker f$ şi $\mathrm{Im} f$ sunt subspaţii invariante relativ la f;

ii) V şi $\{0\}$ sunt subspaţii invariante faţă de orice operator liniar $f : V \to V$;

[18] In ipoteza că $S_i = \emptyset$, secvenţa corespunzătoare nu apare în mulţimea considerată. Mai putem scrie $B = \left(\bigcup_{j=0}^{p-1} g^j(S_1)\right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{p-2} g^k(S_2)\right) \cup ... \cup (g(S_{p-1}) \cup S_{p-1}) \cup S_p$ unde $g^0(S_i) = S_i$, $i = 1, 2, ...$

iii) Orice subspaţiu este invariant faţă de operatorul nul şi faţă de operatorul identitate.

De interes deosebit se bucură subspaţiile invariante de dimensiune 1. Se ajunge astfel la:

Definiţia 2.6. *i) Un element $x \in V \setminus \{0\}$ se numeşte* **vector propriu** *al operatorului liniar $f : V \to V$ dacă există $\lambda \in K$ astfel încât$f(x) = \lambda x$.*

ii) Un element $\lambda \in K$ se numeşte **valoare proprie** *a operatorului liniar $f : V \to V$ dacă $\exists x \in V \setminus \{0\}$ astfel încât$f(x) = \lambda x$.*

Observaţia 2.16. i) Unui vector propriu îi corespunde o singură valoare proprie;

ii) Unei valori proprii îi corespunde o infinitate de vectori proprii, iar $U_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$[19] constituie un subspaţiu liniar invariant[20];

iii) Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte (ale unui acelaşi operator liniar $f : V \to V$) constituie o submulţime liniar independentă.

Demonstraţie. i) Dacă $f(x) = \lambda(x)$ şi $f(x) = \mu x$, atunci $(\lambda - \mu)x = 0$ şi, cum $x \neq 0$, rezultă $\lambda = \mu$.

ii) Dacă x este vector propriu corespunzător valorii proprii λ, atunci μx, $\forall \mu \in K$, satisface, de asemenea, $f(\mu x) = \mu(\lambda x) = (\mu\lambda)x = (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$. Avem şi $f(x) = \lambda x$, $f(y) = \lambda y \Rightarrow f(x + y) = \lambda(x + y)$.

iii) Fie $x_1, ..., x_p$ asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Dacă presupunem că $\beta_1 x_1 + ... + \beta_p x_p = 0$ şi, de exemplu, $\beta_1 \neq 0$, atunci $\beta_2(\lambda_1 - \lambda_2)x_2 + ... + \beta_p(\lambda_p - \lambda_1)x_p = 0$ (prima egalitate se înmulţeşte membru cu membru cu λ_1 şi se scade din $\beta_1\lambda_1 x_1 + ... + \beta_p\lambda_p x_p = 0$).

Dacă presupunem că $\{x_2, ..., x_p\}$ constituie o submulţime liniar independentă atunci rezultă $\beta_2 = ... = \beta_p = 0$ (deoarece $\lambda_i \neq \lambda_j,\ i \neq j, 1 \leq i, j \leq p$). Se obţine $\beta_1 x_1 = 0$ - fals ($\beta_1 \neq 0, x_1 \neq 0$).

Rezultă că are loc: $\{x_1, ..., x_p\}$ liniar dependentă $\Rightarrow \{x_2, ..., x_p\}$ liniar dependentă $\Rightarrow ... \Rightarrow \{x_p\}$ liniar dependent(absurd deoarece $x_p \neq 0$). ■

In cele ce urmează se va indica o metodă de determinare a valorilor proprii (şi vectorilor proprii) 4n cazul unui K-spaţiu liniarde dimensiune finită.

Fie un K-spaţiu liniar$V$, $\dim V = n$, B o bază în V şi $f : V \to V$ un

---

[19]Este numit subspaţiul propriu asociat valorii proprii λ şi este format din 0 şi din vectorii proprii corespunzători valorii proprii λ. Dacă λ nu este valoare proprie, vom avea $U_\lambda = \{0\}$.

[20]Se va vedea ulterior că $\dim U_\lambda$ nu este în mod obligatoriu egală cu 1.

operator liniar. Explicitând pe coordonate egalitatea $f(x) = \lambda x$, se obţine:

$$\begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi + \alpha_{12}\xi_2 + ... + \alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ .... \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + ... + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0 \end{cases}$$

unde $\xi_1, ..., \xi_n$ reprezintă coordonatele lui x în baza dată, iar $A = (\alpha_{ij})_{n\times n} = M_{BB}(f)$ (matricea lui f în baza B).

Pentru ca sistemul astfel obţinut (în necunoscutele $\xi_1, ..., \xi_n$) să admită soluţii diferite de soluţia banală $\xi_1 = ... = \xi_n = 0$, este necesar şi suficient ca determinantul matricei sistemului să fie nul. Deducem de aici că valorile proprii ale operatorului liniar f sunt rădăcinile (din K) ale polinomului $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, numit **polinomul caracteristic al operatorului** f. In locuind valorile găsite pentru λ în sistemul anterior, se deduc sistemele ce au ca soluţii, respectiv, vectorii proprii corespunzători valorii proprii considerate.

Apare ca necesar următorul rezultat (prefigurat şi de faptul că în denumirea de "polinom caracteristic" nu se face referire la matricea operatorului A):

Propoziţia 2.14. *Polinomul caracteristic al unui operator $f : V \to V$ (V este K-spaţiu liniarfinit generat) este invariant*[21] *faţă de schimbarea bazei.*

Demonstraţie. Fie B şi B' baze în V şi $A = M_{BB}(f)$, $A' = M_{B'B'}(f)$. Dacă M este matricea de trecere de la baza B la baza B' atunci $A' = M^{-1}AM$, iar $\det(A' - \lambda I_n) = \det(M^{-1}AM - \lambda M \cdot M^{-1}) = \det M^{-1}(A - \lambda I_n)M = \det M^{-1} \cdot \det(A - \lambda I_n) \cdot \det M = \det(A - \lambda I_n)$ $(n = \dim V)$. ■

Fie V un K-spaţiu liniar, $\dim V = n$, B o bază în V, $f : V \to V$ un operator liniar având polinomul caracteristic $P(\lambda) = \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_0$ (evident $\alpha_n = (-1)^n$) şi $M_{BB}(f) = A$. Notăm şi $f^k = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{k\ ori}$.

Propoziţia 2.15. [Teorema Hamilton-Cayley] *Au loc:*

$\alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + ... + \alpha_0 I_n = O \in \mathcal{M}(n, K)$ *(putem scrie $P(A) = O \in \mathcal{M}(n, K)$)*

şi $\alpha_n f^n + \alpha_{n-1}f^{n-1} + ... + \alpha_0 \cdot 1_V = O \in \mathcal{L}(V, V)$ *(putem scrie $P(f) = O \in \mathcal{L}(V, V)$, unde $O : V \to V$, $O(x) = 0$, $\forall x \in V$).*

---

[21](cu sensul că) polinoamele obţinute pentru acelaşi operator f, folosind baze diferite, au exact aceleaşi rădăcini, de aceleaşi ordine de multiplicitate

Demonstraţie. Pentru λ diferit de valorile proprii ale operatorului f, $A-\lambda I_n$ este inversabilă şi putem scrie $A-\lambda I_n = \dfrac{1}{P(\lambda)}\cdot B$ (*), unde elementele lui B sunt polinoame de grad cel mult $n-1$ (sunt complemenţi algebrici ai elementelor din $A-\lambda I_n$), şi putem scrie $B = B_0 + \lambda\cdot B_1 + ... + \lambda^{n-1}\cdot B_{n-1}$ cu $B_i \in \mathcal{M}(n,K)$, $i=\overline{0,n-1}$.

Explicitând egalitatea (*), putem scrie

$$\alpha_0 \cdot I_n = A\cdot B_0$$

$$\alpha_1 \cdot I_n = A\cdot B_1 - B_0$$

....

$$\alpha_{n-1}\cdot I_n = A\cdot B_{n-1} - B_{n-2}$$

$$\alpha_n \cdot I_n = -B_{n-1}.$$

Inmulţim, la stânga, a doua egalitate cu A, a treia cu A^2 etc., şi însumăm. Obţinem $P(A)=O$. Dar $P(A)$ este matricea operatorului $P(f)$, deci $P(f) = O \in \mathcal{L}(V,V)$.

Propoziţia 2.16. *Fie V un K-spaţiu liniar,* $\dim V = n, f: V\to V$ *un operator liniar. Presupunem că f admite valorile proprii distincte $\lambda_1, ..., \lambda_p$. Dacă $p<n$, atunci există o bază B în V astfel încât*

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 & \cdot & \\ 0 & \lambda_1 & ... & 0 & \cdot & \alpha' \\ 0 & 0 & ... & \lambda_p & \cdot & \\ ... & ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & ... & 0 & \cdot & \\ ... & ... & ... & ... & ... & \alpha'' \\ 0 & 0 & ... & 0 & \cdot & \end{pmatrix}$$

unde $\alpha' \in \mathcal{M}(p, n-p, K)$, $\alpha'' \in \mathcal{M}(n-p, n-p, K)$.

Dacă $n=p$, atunci există o bază B în V astfel încât

$$M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Demonstraţie. Conform rezultatelor anterioare, vectorii proprii $x_1, ..., x_p$ corespunzători respectiv valorilor proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sunt liniar independenţi. Completând (eventual) până la o bază, se obţine pentru matricea lui f forma precizată în enunţ. ∎

Problema găsirii unei baze (problemă, putem spune, sugerată de propoziţia anterioară) în care matricea unui operator să aibă forma diagonală[22] (matrice $(\alpha_{(ij)})_{m\times n}$ în care $\alpha_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$) nu este în întregime rezolvată de această propoziţie. Prezenţa a n valori proprii distincte ($n = \dim V$) este condiţie suficientă dar nu şi necesară de exsitenţă a unei astfel de baze.

Remarcăm şi faptul că baza B în care $M_{BB}(f)$ are forma diagonală este alcătuită de vectori proprii ai operatorului liniar f şi reciproc, matricea operatorului liniar f într-o bază alcătuită din vectori proprii (ai lui f) are forma diagonală.

Aceasta rezultă din aceea că pentru $B = \{e_1, ..., e_n\}$ $f(e_i) = \alpha_i e_i$, $i = \overline{1, n} \Leftrightarrow M_{BB}(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \alpha_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \alpha_n \end{pmatrix}$. Deducem şi că, în ipoteza existenţei formei diagonale pentru matricea unui operator, această formă va avea pe diagonală valori proprii operatorului. Analiza situaţiei descrise conduce la:

Propoziţia 2.17. *Fie V un K-spaţiu liniar,* $\dim V = n$ *şi* $f : V \to V$ *un operator liniar. Presupunem că f admite valorile proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$ având ordinele de multiplicitate $m_1, ..., m_p$, iar $m_1 + ... + m_p = n$[23]. Atunci există*

[22] Calculele efectuate cu matrice de formă diagonală sunt foarte simple. De exemplu, dacă $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mu_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \mu_n \end{pmatrix}$ atunci $A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \mu_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n & \mu_n \end{pmatrix}$, $A^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n^m \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

[23] Altfel spus, dacă, de exemplu, $K = \mathbb{R}$, atunci polinomul caracteristic are toate rădăcinile reale (anume în $K = \mathbb{R}$). Condiţia este automat îndeplinită pentru K corp algebric închis.

o bază B în V astfel încât

$$M_{BB}(f)=\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & \lambda_p \end{pmatrix}$$

(λ_i apare de m_i ori, $i=\overline{1,p}$) dacă şi numai dacă $\dim U_{\lambda_i}=m_i$*, $i=\overline{1,p}$ ($U_{\lambda_i}=\{x \mid f(x)=\lambda_i x\}$, $i=\overline{1,p}$ reprezintă subspaţiile liniare invariante date în observaţia 2..)*[24]*.*

Demonstraţie. Dacă $\{e_1^1,...,e_1^{m_1},e_2^1,...,e_2^{m_2},...,e_p^{m_p}\}$ reprezintă baza în care matricea operatorului liniar f are forma din enunţ[25], atunci se verifică faptul că $\{e_j^1,...,e_j^{m_j}\}$ reprezintă o bază în U_{λ_j}, $j=\overline{1,p}$.

Reciproc: Reunind bazele tuturor subspaţiilor U_{λ_j}, $j=\overline{1,p}$, se obţine o bază în V. ■

2.2 Forma canonică Jordan

Rezultatele prezentate anterior nu fac referiri la următoarele cazuri: $m_1+...+m_p<n$ (aceasta înseamnă că "nu toate (posibil nici una[26]) rădăcinile polinomului caracteristic se găsesc în K", altfel spus, polinomul caracteristic nu se poate scrie ca un produs de polinoame de gradul 1 în $K[X]$) - şi $m_1+...+m_p=n$ dar $\exists j, 1\le j\le p$, încât $\dim U_{\lambda_j}\neq m_j$ (vom avea $\dim U_{\lambda_j}<m_j$). Dacă se consideră $K=\mathbb{C}$ (situaţie ce apare de cele mai multe ori în aplicaţii), primul caz se elimină.

[24]In general, pentru orice valoare proprie i, $i=\overline{1,p}$ a operatorului liniar f, $\dim U_{\lambda_i}\le m_i$ (ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_i), $i=\overline{1,p}$. Intr-adevăr, presupunând că $\dim U_{\lambda_i}=q_i$, $1\le i\le p$ şi prelungind baza din U_{λ_i} la o bază în V se obţine (din forma pe care o capătă matricea operatorului liniar în această bază) că $(\lambda-\lambda_i)^{q_i}$ divide polinomul caracteristic. Se deduce de aici că are loc $q_i\le m_i$, $i=\overline{1,p}$.

[25]Se are în vedere faptul că ordinea elementelor din bază corespunde regulii de formare a matricei date.

[26]Prin convenţie putem considera, în acest caz, $m_i=0$, $i=\overline{1,p}$.

In cel de-al doilea caz (pentru $K = \mathbb{C}$, condiţia $m_1 + ... + m_p = n$ este întotdeauna îndeplinită) se ajunge la aşa numita formă canonică Jordan[27].

Fie $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathcal{M}(n, K)$, $n_1 < n_2 < ... < n_p = n$, şi $A_1 = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n_1$, $A_2 = (a_{ij})$, $n_1 + 1 \leq i, j \leq n_2, ..., A_p = (a_{ij}), n_{p-1} + 1 \leq i, j \leq n_p = n$. Dacă în matricea A, toate elementele ce nu se găsesc în $A_1, ..., A_p$ sunt egale cu $0 \in K$ spunem că A are **formă cvasidiagonală**. Dacă, în plus, fiecare "submatrice" A_j, $j = \overline{1,p}$ are forma

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & ... & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}$$

spunem că A are **forma canonică Jordan** (submatricele A_j sunt numite **blocuri Jordan**).

Teorema 2.4. *Fie V un K-spaţiu liniar,* $\dim V = n$ *şi $f : V \to V$ un operator liniar. Presupunem că f admite valorile proprii $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de ordine de multiplicitate $m_1, ..., m_p$ şi $m_1 + ... + m_p = n$ (polinomul caracteristic al lui f admite toate rădăcinile în K). Atunci există o bază B în V astfel încât$M_{BB}(f)$ să aibă forma canonică Jordan.*

Demonstraţie. Vom nota $g_j = f - \lambda \cdot 1_V$ $(g_j : V \to V)$, $g_j^k = \underbrace{g_j \circ g_j \circ ... \circ g_j}_{k}$ şi $V_{\lambda_j} = \ker g_j^{m_j}$, $j = \overline{1,p}$. Se constată cu uşurinţă că V_{λ_j}, $j = \overline{1,p}$ sunt subspaţii liniare nenule ale lui V, invariante faţă de f. Invarianţa rezultă din aceea că $((f - \lambda_j \cdot 1_V) \circ f)(x) = (f - \lambda_j \cdot 1_V)(f(x)) = f(f(x)) - \lambda_j f(x) = (f \circ (f - \lambda_j \cdot 1_V))(x)$ şi deci $g_j \circ f = f \circ g_j$. Atunci, din $g_j(x) = 0$ rezultă $g_j(f(x)) = f(g_j(x)) = f(0) = 0$, $j = \overline{1,p}$. In continuare, vom arăta că $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$. Fie atunci polinomul caracteristic al operatorului liniar f, $P(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1}...(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$. Notăm $Q_j(\lambda) = (-1)^n \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ şi $P_j(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{m_j}$.

[27] O altă formă utilă la care se poate ajunge este "forma triunghiulară" a matricelor operatorilor liniari.

Există atunci polinoamele $H_j(\lambda)$ $j = \overline{1,p}$ astfel încât$H_1(\lambda)Q_1(\lambda) + ... + H_p(\lambda)Q_p(\lambda) = 1$ (*). Conform propoziţiei 2.. $P(f) = 0 \in \mathcal{L}(V, V)$ şi, în consecinţă, $P_j(f) \circ Q_j(f) = O \in \mathcal{L}(V, V)$, $j = \overline{1,p}$, deci $Q_j(f)(x) \in V_{\lambda_j}$, $j = \overline{1,p}$. Relaţia (*) conduce la

$$H_1(f) \circ Q_1(f) + ... + H_p(f) \circ Q_p(f) = 1_V.$$

Notând atunci $y_j = (Q_j(f))(x)$ şi $x_j = (H_j(f))(y_j)$, $j = \overline{1,p}$, obţinem (pentru orice $x \in V$) descompunerea $x = x_1 + ... + x_p$, unde $x_j \in V_{\lambda_j}$, $j = \overline{1,p}$. Presupunând că $x = x_1 + ... + x_p = x'_1 + ... + x'_p$ notăm $z_j = x_j - x'_j$, $j = \overline{1,p}$, şi obţinem $z_1 + ... + z_p = 0$. Avem: $(P_1(f))(z_1) = 0$ ($z_1 \in V_{\lambda_1}$) şi $(Q_1(f))(z_k) = 0$, $k = \overline{1,p}$. Rezultă $(Q_1(f))(z_1) = (Q_1(f))(-(z_2 + ... + z_p)) = 0$. Există (vezi nota anterioară) polinoamele R_1 şi S_1 astfel încât$R_1(f) \circ P_1(f) + S_1(f) \circ Q_1(f) = 1_V$ şi deci $(R_1(f) \circ P_1(f))(z_1) + (S_1(f) \circ Q_1(f))(z_1) = z_1$, de unde rezultă $z_1 = 0$. In mod similar, obţinem $z_2 = ... = z_p = 0$. Conform celor anterioare, $V = \bigoplus_{j=1}^{p} V_{\lambda_j}$.

In continuare, fie f_j restricţia operatorului f la V_{λ_j}($f_j : V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}, f_j(x) = f(x)$), $j = \overline{1,p}$ şi operatorul $f_j - \lambda_j \cdot 1_{V_{\lambda_j}} : V_{\lambda_j} \to V_{\lambda_j}$.

Conform propoziţiei 2.6 există o bază B_j în V_{λ_j} în care operatorul liniar $f_j - \lambda_j \cdot 1_{V_{\lambda_j}}$ să ai bă matricea sub forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & ... & 0 \\ & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \varepsilon_{r_j} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

unde $r_j = \dim V_{\lambda_j} - 1$, iar $\varepsilon_k \in \{0, 1\}$, $k = \overline{1,r}, j = \overline{1,p}$.

Atunci, f_j va avea matricea:

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & \varepsilon_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_j & \varepsilon_2 & ... & 0 \\ & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \varepsilon_{r_j} \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_j \end{pmatrix}, j = \overline{1,p}.$$

$B = \bigcup_{j=1}^{p} B_j$ constituie o bază în V în care matricea lui f capătă forma canonică Jordan (dacă unele dintre elementele ε_k ce apar în blocurile anterioare sunt nule, se procedează la o redescompunere în blocuri Jordan, obţinându-se efectiv forma cerută în enunţ). $\blacksquare$