

Fundamentele matematicii

Prof. dr. Ioan TOFAN

Cursurile și seminariile conțin detalieri, exemplificări, comentarii relative la tematica următoare.

Preliminarii istorice

- Perioada elenistică (*Euclid* - sistemul axiomatic; concepte: teoremă, definiție, demonstrație).
- Matematica mărimilor variabile: - calculul diferențial și calculul integral (*Leibniz, Newton*); - metoda coordonatizării (*Descartes*), geometria analitică.
- Sistematizarea cunoștințelor, apariția lucrărilor de istoria matematicii; studiul fundamentelor matematicii.

Natura conceptelor matematice

- *Platon* (teoria ideilor numere); *Aristotel* (abstracția idealizantă).
- *R. Courant, H. Robbins, B. Russel, H. Hankel, C. Foiaș* etc. - despre matematică.
- Sisteme definatorii (definiție; exemple).
- Conceptul de număr (*Platon, Pitagora, Fraenkel, Weierstrass, Grassmann, Peano, Frege, Dedekind, Cauchy*).

Temeiul logic al matematicii

- Algebra Boole; metode de raționament, tautologii, metode de demonstrație.

Teorii axiomatice

- Teorii axiomatice - introducere, prezentare, exemplificare; problema necontradicției, problema independenței, problema completitudinii și a categoricității.
- Teoria mulțimilor, sistemul Zermelo-Fraenkel; antinomii, critica axiomei alegerii.
- Teoria mulțimilor, sistemele Gödel, Bernays.
- Planul euclidian (axiomele Euclid).
- Axiomele Hilbert
- Geometrii neeuclidiene (*Riemann, Lobacevski-Bolyai*).

Logicism, formalism, intuiționism

- Logicismul: *Leibniz, Frege, Russel* (Paradoxul lui Russel, teoria tipurilor), *Principia mathematica* (*B. Russell, A. Whitehead*).
- Formalismul: *D. Hilbert* (Über die Grundlagen der Logik und Mathematik, 1904), teoria demonstrației, Teoremele lui Gödel.
- Intuiționism: *H. Poincaré, L. Kronecker* (precursori), *L. E. J. Brouwer, A. Heyting, E. Bishop*. Exigența centrală este constituită de constructivism; - critica infinitului actual, critica principiului terțului exclus; - logica polivalentă.

Algebra Heyting

- Definiție, comparație (algebra Heyting, algebra Boole), legătura cu logica intuiționistă.

Teoria categoriilor

- Intensionalitate vs. extensionalitate; proprietăți de (co)universalitate, limite proiective, limite inductive, echivalență, adjuncție;
- Limbajul categorial.

- Structuralism (*S. Eilenberg, S. Mac Lane*) vs. ansamblism (*G. Cantor*).

Infinit, infinitezimal

- Evoluția istorică (apeiron - *Anaximandru* → infinit actual, potențial etc.) *Aristotel, Zenon*;
- Infinit actual (*G. Cantor, Weierstrass, Hilbert*);
- Infinit potențial (*Gauss, Cauchy* etc)

Mecanisme de dezvoltare

- Interne (programe fundamentale, probleme Hilbert, extinderi (algebra → geometrie algebră; geometrie → teoria numerelor etc.)
- Externe (matematici aplicate);
- Principii (dualitate, simetrie etc.)

Suport bibliografic

1. **O. Becker** – *Fundamentele matematicii*, Ed. Șt., București, 1968.
2. **O. Becker** – *Măreția și limitele gândirii matematice*, Ed. Șt., București, 1968.
3. **E. W. Beth** – *The foundation of Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 1965.
4. **D. Brânzei** – *Fundamentele matematicii structurale*, Univ. "Al. I. Cuza", Iași, 1976.
5. **J. Brouwer** – *Intuitionism and formalism*, Bull A.M.S. 20, 1913.
6. **R. Courant, H. Robbins** – *Ce este matematica*, Ed. Șt., București, 1969.
7. **A. Dumitriu** – *Mecanismul logic al matematicii*, Ed. Acad., București, 1968.
8. **C. Foiaș** – *Is Mathematics a human creation?*, Analele Universității Timișoara, seria Mat-Info, vol. 37 (1999), p.1-4.
9. **G. Frege** – *Foundations of Arithmetic*, Oxford Blackwell, N. Y., 1956.
10. **A. Heyting** – *Les fondements des mathematiques. Intuitionism. Theorie de la demonstration*, Gauthier-Villars, Paris, 1955.

11. **D. Hilbert** – *The Foundations of Mathematics in J. van Heijenoort (ed.), From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge, Massachusetts, 1967.
12. **S. K. Kleene** – *Introduction to Metamathematics*, N. Y. van Nostrand co., 1953.
13. **St. Körner** – *Introducere în filosofia matematicii*, Ed. Șt., București, 1965.
14. **M. Kline** – *Mathematical Thought from ancient to modern Times*, D. van Nostrand Comp. Ltd., London, Toronto, New York, Princeton, 1963.
15. **R. Miron, D. Brânzei** – *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Ed. Acad., București, 1983.
16. **J. R. Newmann** – *The world of Mathematics*, N. Y. Simon and Schuster, 1956.
17. **D. Papuc** – *Universul matematic al civilizației umane, ed. II*, Ed. Univ. de Vest, Timișoara, 2010.
18. **M. Țurlea** – *Filosofia și fundamentele matematicii*, Ed. Acad., București, 1982.
19. **M. Țurlea** – *Construcția axiomatică a matematicii*, Ed. Acad., București, 1998.
20. **Izu Vaisman** – *Fundamentele matematicii*, E.D.P., București, 1968.

* * *

The Princeton Companion to Mathematics, T. Gowers (editor), Princeton Univ. Press, 2008.