I. TOFAN

ITINERARII MATEMATICE

(note de curs)

Paragrafele ce urmeaza contin însemnările pe baza carora (divagand sau comentand) au fost realizate cursuri sustinute la sectia de masterat de la Facultatea de Matematica, Universitatea "Al. I. Cuza", Iasi. Au fost avute in vedere acele elemente ce pot avea legatura (nu neaparat explicita) cu latura expozitiva, legata de invatarea matematicii, cu stabilirea conținuturilor matematice ce se subsumează unor obiective culturale generale, cu înlăturarea obstacolelor, asperităților (găsirea a ceea ce putem numi "cale republicană, democratică" în matematică) din drumul ce trebuie parcurs în vederea asimilării acestor conținuturi în procesul de învățământ (astfel spus cu didactica matematică).

Prin învățământ se înțelege un proces de asimilare, de acomodare – formare continuă, de creare a unui sistem de cunoştințe (succesiune ordonată de concepte care implică şi interconexiuni între concepte în care roluri importante au şi acțiunea, concretul, intuiția), etc.

"A învăța matematica" – nu înseamnă doar a învăța să rezolvi ecuații, să calculezi arii, volume, etc., dar şi: să "citeşti" (interpretezi) realul în mod rațional, să te apropii de modelele ce reprezintă exemple de rigoare; să dezvolți capacitățile de analiză, sinteză şi critică (constructivă).

Cuprins

1. Despre natura matematicii

Nu vom incerca sa raspundem intrebarii "Ce este matematica? ". Mai degraba s-ar putea argumenta ca nu se poate da un raspuns (E. Courant, H. Robbins). In registru anecdotic am putea aminti ca B. Russel afirma ca "matematica este stiinta in care niciodata nu se stie *despre ce se vorbeste si nici daca ceea ce se vorbeste este adevarat*", sau ca se spune: matematica este o activitate desfasurata de un numar restrans de persoane ce au convenit sa o numeasca asa, etc. Este evident ca Russel a intentionat sa provoace o lectura rasturnata a textului citat: " *matematica este singura stiinta in care se stie exact ...*" .

In decursul timpului matematica a fost definita ca fiind stiinta relatiilor cantitative si a formelor spatiale, ca fiind un limbaj, stiinta ce studiaza cu ajutorul rationamentelor deductive entitati abstracte precum si relatiile dintre ele (cf. dictionar Larousse) , etc.

Se mai citeaza, de obicei poetica formulare data de F. Gonseth: "*In esenta ei, matematica nu-i decat un ansamblu de vederi si de procedee schematice ale spiritului nostru, replica constienta a activitatii inconstiente care creeaza in noi o imagine a lumii si un ansamblu de norme dupa care noi actionam si reactionam. Nu-i un edificiu ancorat undeva intr-o absoluta soliditate, ci o constructie aeriana care rezista ca prin minune: cea mai indrazneata si neverosimila aventura a spiritului.*"

Vom mai aminti cateva afirmatii celebre relative la esenta matematicii. H. Hankel afirma ca "*matematica este teoria pura a formelor, al carei obiect il constituie constructele mentale carora le pot corespunde obiecte sau relatii reale, desi o asemenea corespondenta nu e obligatorie*". Imm. Kant spunea ca "*in fiecare stiinta particulara a naturii se poate gasi numai exact atata stiinta autentica, cata matematica contine*".

Este clar ca un raspuns sau comentariile privind natura matematicii sunt în continua schimbare, in concordanta cu evolutia matematicii (unele referiri concrete vor fi incluse în § 9 şi în §11).

Pentru antici, probabil ca matematica insemna o metoda (un instrument) de examinare, de observare a naturii inconjuratoare, instrument ce facea parte din natura insasi. In Grecia antica se cristalizase ideea ca, alaturi de afirmatia ca matematica deriva din observarea lumii este adevarata si aceea ca remarci privind lumea deriva din matematica. Se sugereaza si ca ideile matematice nu reprezinta doar un limbaj creat pentru a ajuta la intelegerea realitatii fizice si ca ele se regasesc in mod intrinsec in realitatea fizica sau mentala. Pana spre secolul al XIX-lea a subzistat (in filosofia occidentala) mitul adevarurilor absolute ale matematicii. Aparitia, de exemplu, a geometriilor neeuclidiene a dus la o reevaluare a conceptului de "*adevar matematic*" (problema raportarii la un sistem axiomatic, problema inconsistentei, existenta modelelor, etc).

Indubitabil insa matematica este una dintre cele mai mari cuceriri intelectuale. Alaturi de cunoasterea propriu-zisa ce o ofera, matematica inseamna si un limbaj, procedee si teorii ce confera, in general, stiintei organizare si vigoare. O trasatura caracteristica a matematicii este metoda de rationament, mai bine zis preponderenta metodei deductive de demonstratie, de rezolvare a problemelor. Acest fapt a fost remarcat inca de matematicienii greci in antichitate. Mai mult, era clar ca pentru a obtine prin deductie adevaruri erau necesare unele adevaruri initiale (axiomele) .

Un alt fapt intalnit in matematica este gradul inalt de abstractizare al conceptelor cu care opereaza.

Este de reamintit si caracterul de limbaj simbolic ce poate fi atribuit matematicii. Acesta ofera precizie, concizie si chiar comprehensibilitate.

Cele anterioare impreuna cu rolul imens jucat de matematica in stiinta arata "*puterea*" matematicii si constituie motivul proliferarii ei in cultura moderna. Unele "*tulburari*" (in anumite optici-subminatoare ale piedestalului matematicii) au provenit din chiar interiorul acesteia: aparitia geometriilor neeuclidiene ce ridica semne de intrebare asupra universalitatii axiomelor, teorema de incompletitudine a lui Gödel (asupra careia vom reveni ulterior), multitudinea fațetelor adevarului matematic, criza teoriei multimilor, etc.

De importanță covârşitoare, în acest context sunt cadrul de lucru şi regulile specifice acestuia, astfel poate produce mirare faptul că, de exemplu, din axiomele aritmeticii decurge 2+1=3, dar

$2\ m^3\ H + 1\ m^3\ O = 2\ m^3\ H_2O$ (nu $3\ m^3$) (transpare aici incalcarea principiului identitatii), sau poate fi argumentata egalitatea $a/b + c/d = (a + b)/(c + d)$.

Matematica incearca o mediere (macar partiala) intre "*interiorul*" omului si lumea exterioara. Se spune ca "*science provides the understanding of the universe in which we live. Mathematics provides the dies by which science is molded. Our world is to a large extent what mathematics says it is*" (M. Kline).

2. Activitatea matematica

Activitatea matematica propriu-zisa are urmatoarele componente:

- invatarea activa (studiul teoriilor clasice si moderne realizand comentarii, divagatii, reformulari);

- euristica (a pune si a rezolva probleme; a imagina teoreme si a le demonstra);

- expozitiva (a participa la circulatia informatiei matematice redactand manuale, realizand monografii, prezentand comunicari la seminariile si conferintele stiintifice, desfasurand activitati didactice);

- aplicativa (adaptand si aplicand metodele abstracte in rezolvarea problemelor concrete);

In ceea ce priveste activitatea didactica (asupra căreia vom insista în continuare) remarcăm, alături de prezentarea in desfasurare constructiva de notiuni si rezultate, si necesitatea propunerii de enunturi care sa deschida investigatii, de probleme deschise pentru care sa se lucreze si asupra enunturilor precum si necesitatea dezvoltarii aptitudinilor de a pune (si rezolva) noi probleme.

Exemplificam prin studiul unor situatii precum:

- se considera doua vase A si B de aceeasi capacitate, continand lichidul a, respectiv b (de exemplu 2 cesti cu lapte, respectiv cafea); se ia o cantitate din A (de exemplu 1 dl) si se toarna (amestecand) in B (presupunem ca A si B nu sunt pline si este posibil transferul anterior); apoi se reia procedeul turnand 1 dl de lichid din B in A s.a.m.d.. Se cere studiul matematic al situatiei anterioare.

- se stie ca cicloida este curba (traiectoria) descrisa de un punct al unui cerc care se rostogoleste; se cere sa se studieze cazul in care cercul este inlocuit cu un hexagon (miscare similara rostogolirii).

In acelasi context se inscriu:

- decelarea definitiilor cu ajutorul auditoriului (discutand incorectitudinile ce pot aparea);

- schimbarea viziunii asupra obiectelor matematice; de exemplu expresia

$E=a^2(b-c)+ b^2(c-a)+ c^2(a-b)$ poate fi privita ca polinom in nedeterminatele a, b,c; ca trinom in a (sau b, sau c); ca obtinuta prin dezvoltatea unui determinant; etc.

In mod analog notiunea de triunghi isoscel poate fi definita prin calitatea de a avea 2 laturi egale (ca marime), etc., dar si ca triunghi ce poseda o axa de simetrie.

Remarcam aici importanta studiului invariantilor ce va constitui o activitate constienta a profesorului si o acumulare cantitativa pentru elev. Se poate glosa si despre influenta elementelor de simetrie, sau de invarianta, din ipoteza unei teoreme asupra concluziei acesteia.

In orice prezentare profesorul trebuie sa fie capabil sa schimbe itinerarul pe care si-l propusese in functie de ideile aparute in cadrul dialogului cu auditoriul, sa promoveze "*emotia pozitiva*" data de "*iluminarea subita*" ce ar trebuie sa incheie macar unele din procesele de cautare (cercetare) desfasurate de cei ce invata matematica.

Euristica generala trebuie completata cu metodologii specifice consacrate unor tipuri speciale de probleme sau domenii ce trebuie sa aiba nu doar rol ilustrativ. Mai mult, accentul nu trebuie pus pe exercitii construite in mod special pentru a ilustra o regula sau o teorema ci pe exercitii ce au un interes propriu si se rezolva prin adaptarea de metode generale.

Varianta optimala ar fi aceea care presupune interferente intre aspectul executiv si cel de reflectie in abordarea si rezolvarea unei probleme. Trebuie avute in vedere atat imperativul (enuntat de Dirichlet) de a **nu** substitui ideile, cu calculul, dar si cel al dezvoltarii "*artei calculului*".

Activitatea metodologica a profesorului trebuie sa se desfasoare pe multiple planuri:

- antrenament pentru organizarea si valorizarea unor automatisme de calcul;
- relevarea tehnicilor si importantei verificarilor (particularizari, verificarea omogenitatii, a ordinului de marime, etc.);
- stimularea reflectiei asupra metodelor, drumului parcurs, rezultatelor;

Inainte de toate rolul profesorului este si acela de a-i invata pe elevi sa invete, iar in matematica a invata inseamna, in primul rand a intelege.

In ceea ce priveste invatatul distingem:

- invatare sincretică: elevii isi urmeaza pas cu pas profesorul (mai mult prin imitatie), numai ca exista inclinatia ca elevul sa imite nu numai calitatile, dar si defectele maestrului;
- invatare analitică: presupune axiomatizarea operatiilor de baza, intelegerea regulilor si apoi dezvoltarea progresiva pana la rezultatul scontat.

Constientizand unele dintre inconvenientele invatamantului sincretic (cvasi unanim utilizat) se pot aduce remedieri (alegerea de exemple variate si potrivite, schimbarea punctelor de vedere in abordarea problemelor, etc.). Nu trebuie uitat si ca rutina face ca anumite etape sa devina automatisme pentru profesor, dar acestea nu au acelasi statut in cazul elevilor.

Pentru a vedea (in final) daca lucrurile au fost intelese este necesar sa verificam daca elevul este in masura sa sustina un dialog pe tema data, sa faca observatii suplimentare, sa gaseasca exemple (creativitatea fiind cel mai bun test si nu abordarea pasiva prin rezolvarea de probleme date). Intelegerea unui enunt inseamna evidentierea rolului fiecarei ipoteze sau restrictii.

In sfarsit, in cadrul studiului individual (receptarea unui text matematic) se indica metoda apropierilor succesive, anume pentru relevarea unui text matematic:

- se constientizeaza intai problemele si rezultatele fundamentale;

- se fac legaturi ale acestei noi informatii cu cunostintele anterioare;

- se disting ideile de demonstrare;

- se fac verificarile de rutina.

Nu este lipsita de interes lectura comparata a mai multor materiale ce trateaza o aceeasi tema.

3. Definitiile in matematica

Examinand continutul matematicii putem remarca faptul ca acesta este constituit dintr-un sistem de teorii matematice (ansambluri de concepte matematice, proprietati ale acestora, interrelatii, etc.) obtinute prin studiul anumitor structuri matematice. Intre instrumentele esentiale utilizate in constructia teoriilor matematice se numara si definitiile. La orice concept (cu exceptia celor primitive) deosebim definitia, sfera si continutul conceptului respectiv.

Definitia unui concept matematic este un enunt in care se da denumirea conceptului respectiv (definit), eventual notatia matematica a acestuia si un sistem (definent) de preferinta minimal, de proprietati caracteristice (prin sistem minimal de proprietati caracteristice intelegem un sistem de proprietati asa incat nici una dintre acestea nu poate fi dedusa din celelalte proprietati ale sistemului).

Sfera unui concept matematic este multimea maximala ale carei elemente satisfac proprietatile caracteristice din definitia conceptului matematic respectiv.

Observand ca un “obiect matematic” apartine sferei unui concept matematic daca si numai daca el satisface proprietatile caracteristice date in definitia conceptului respectiv, rezulta ca “ a defini un concept matematic” este echivalent cu a-i determina sfera.

Continutul unui concept matematic este un sistem de propozitii matematice adevarate pentru acel concept cat si concepte matematice asociate lui si propozitii matematice adevarate, referitoare la acestea.

Extinzand continutul unui concept (prin descoperirea de rezultate semnificative), acest continut poate deveni o teorie matematica, conceptul matematic initial jucand rolul de structura matematica pentru aceasta teorie. Reamintind ca a defini un concept matematic este echivalent cu a-i determina sfera, deducem ca modalitatile de definire a noi concepte matematice coincid cu modalitatile de "a da" sferele acestor concepte ce nu sunt altceva decit multimi particulare. Situandu-ne in cadrul unei teorii matematice date vom remarca si ca in definirea unui concept matematic nou sunt inglobate de obicei concepte matematice cunoscute (concepte primitive sau derivate deja din acestea). Observatiile anterioare intervin in contextul incercarii de a discerne modalitatile de a defini noi concepte matematice, anume:

- definitii obtinute prin particularizare (gen proxim+diferenta specifica);

Exemplu: numim triunghi isoscel un triunghi ce admite o axa de simetrie;

- definitii obtinute prin generalizare;

Exemplu: doua multimi in planul euclidian sunt numite multimi asemenea daca exista o corespondenta biunivoca intre ele astfel incat raportul distantelor determinate de doua puncte arbitrare ale primei multimi si, respectiv, de punctele corespunzatoare (prin bijectia considerata anterior) din cea de a doua multime sa fie constant.

Definitia anterioara este obtinuta prin generalizarea celei pentru multimi congruente (dintr-un spatiu euclidian) pentru care se cere egalitatea distantelor de mai sus (raportul amintit este egal cu 1).

- definitii obtinute prin abstractizare; in acest caz se tine cont ca, daca A este o clasa (multime) inzestrata cu o relatie de echivalenta ρ (importante sunt simetria si tranzitivitatea lui ρ) si a∈A, atunci prin abstractiunea lui a relativ la ρ se intelege multimea tuturor elementelor lui A a ce se afla in relatia ρ cu a (clasa de echivalență a lui a).

Exemple: pentru $a \in Z$, $b \in Z^*$ definim fractia a/b prin $a/b = =\{(x, y) \mid x\in Z, y\in Z^*, ay = bx\}$. Un comentariu se impune aici, anume membrul II al egalitatii anterioare poate fi considerat drept definitie si pentru, de exemplu, 10 la puterea a/b, $(a/b)^{1/2}$,...

- definitii obtinute prin recurenta;

Exemple: i) Consideram multimea propozitiilor simple. Toate propozitiile obtinute din propozitii simple prin aplicarea conectorilor logici $\wedge$, $\vee$, $^{-}$ sunt propozitii compuse. Toate propozitiile obtinute din propozitii compuse plin aplicarea conectorilor $\wedge$, $\vee$, $^{-}$ sunt propozitii compuse. Acestea sunt toate propozitiile compuse.

ii) Operatia de adunare a numerelor intregi se defineste prin :

$$a + 0 = a;$$

$$a+s(b)=s(a+b);$$

- definitii date prin precizarea directa a sferei noului concept matematic (modalitate operabila in cazul conceptelor matematice a caror sfera este finita);

Exemplu: numim functie trigonometrica oricare dintre functiile sinus, cosinus, tangenta, cotangenta, secanta, cosecanta (intr-un cadru in care deja aceste functii au fost definite).

Am mai putea distinge intre:

- definitii date prin egalitati ce nu contin nedeterminate ;

Exemplu: $Z = N \cup -N$;

- definitii ce contin nedeterminate (caz in care este necesara precizarea domeniului acestora);

Exemplu: pentru $a, b \in N$ spunem ca a este prim cu b daca (prin definitie) c.m.m.d.c $(a,b)=1$.

- definitii date prin postulate;

Exemplu: definitia Peano data pentru N.

Uneori este necesara precizarea (in cadrul definitiei) a unui concept fundamental in cadrul considerat, anume a egalitatii.

Exemplu: In vederea introducerii conceptului de fractie se considera cuplurile de numere intregi pentru care:

$(a, b) = (c, d)$ daca $ad = bc$;

$(a, k) + (b, k) = (a+b, k)$; etc.

Se impune a raspunde acum la intrebari de genul "*Ce inseamna o definitie buna* ?" sau "*Ce inseamna a intelege o definitie* ?". La prima intrebare se poate raspunde in registre diverse:

un profesor, de exemplu, ar putea raspunde ca o definitie buna este aceea ce poate fi inteleasa de elevi. Este evident ca, mai ales in context educational, trebuie impacate: regulile intransigente ale logicii, necesitatea includerii intr-un sistem, stimularea intuitiei si tendinta, cel putin la varstele mici, de a judeca prin intermediul imaginilor.

In buna parte definitiile matematice se edifica pe baza unor notiuni (conditii) mai “*simple*” (combinate) . Este important sa justificam atunci de ce conditiile se reunesc in modul considerat si nu in alt mod.

Iar, daca scopul unei definitii este acela de a distinge anumite obiecte de altele este necesar sa exemplificam amandoua clasele de obiecte.

In legatura cu cea de a doua intrebare putem spune ca “*a intelege o definitie*” inseamna a recunoaste semnificatiile, sensurile termenilor cu care se opereaza si a constata daca apar sau nu contradictii.

Un raspuns unanim acceptat nu poate fi obtinut: printre cei ce invata matematica sunt si persoane care nu au apetenta pentru matematica, sunt si persoane ce nu pot retine sau reproduce concepte si rezultate fara a face, de exemplu, asocieri cu imagini sensibile si pentru care a intelege inseamna a actualiza imaginea.

Exagerand, putem spune ca exista cazuri cand in clasa o definitie precum “*cercul este locul geometric al punctelor egal departate de un punct fix*” este transcrisa, de unii, cu constiinciozitate, in caiet, neauzita (din cauza altor ocupatii) de altii. Insa, atunci cand se va desena un cerc pe tabla este aproape previzibila o reactie de genul "*De ce nu ne-ati spus de la inceput ca cercul este ceva rotund* ?".

Evident, exemplul anterior nu se inscrie in logica realitatii discursului educational ce trebuie sa tina cont de modul in care evolueaza inteligenta, de specificul varstei careia i se adreseaza, etc.

Un concept (folosim un alt exemplu) cum ar fi cel de fractie se capata astfel: in clasele primare taind (mental) in bucati prajituri, mere si alte obiecte, in timp ce, mai tarziu, devine un cuplu de numere intregi separate de o linie orizontala, etc. Pas cu pas se ajunge la definitia uzuala.

Intre parametrii ce influenteaza modul de prezentare a conceptelor matematice se numara si tipul (majoritar) de inteligenta a auditorilor. Chiar si printre matematicieni se pot distinge tipuri de inteligenta: de la cea logica (de exemplu Weierstrass) la cea intuitiva (de exemplu Riemann). La nivel scolar aceasta revine, de exemplu, la preferinte spre o rezolvare "*analitica*" , respectiv "*sintetică*" a unor probleme. O alta directie de analizare a definitiilor este descrisa de Aristotel (definitii reale/definitii nominale). Citam, in acest context:

"*On ne reconnait en géometrie que les seuls définitions que les logiciens appellent définitions du nom*."

(Poincaré; Pensées)

“*Definitiorum divisio in verbales et reales omni caret sensu*”

(Möbus;Werke)

Mai remarcam şi ca, desi in cadrul limbajului uzual sunt combatute definitiile “*negative*”, acestea sunt acceptate in matematica si considerate perfect riguroase.

Exemplu: Prin curba se (mai !) intelege o linie ce nu este dreapta, nici compusa din parti de dreapta.

Mai mult se pot defini entitati a caror existenta se demonstreaza ulterior definirii (exemple: limita,derivata).

Amintim si ca o definitie fiind o simpla conventie de limbaj asupra ei nu apare problema daca este adevarata sau falsa.

In plus (la nivel anecdotic) putem spune ca inlocuind intr-un discurs “*definitul*” prin “*definent*” se obtine un text ce nu va contine nici o definitie.

În final menţionăm că alături de varianta internalizatoare (definirea obiectelor matematice prin condiţii asupra structurii lor interne), teoria categoriilor a generat o tendinţă externalizatoare (bazată pe modul de interrelaţionare dintre diverse obiecte matematice) ce poate fi pusă în legătură şi cu eventuala rejectare a axiomei alegerii.

Vom exemplifica prin noţiunile de produs cartezian şi de grup.

În accepţiune clasică produsul cartezian a două mulţimi nevide A, B se defineşte prin $A \times B = \{(a, b) \mid a\in A, b \in B\}$.

În varianta externalizatoare produsul cartezian este determinat (până la o bijecţie) de: prin produs cartezian al mulţimilor nevide A, B se înțelege o mulțime P împreună cu două funcții $p_A : P \to A$, $p_B : P \to B$ aşa încât pentru orice mulțime X împreună cu funcțiile $f_A : X \to A$, $f_B : X \to B$ există şi este unică o funcție $\varphi: X \to P$ satisfăcând condițiile $p_A \circ \varphi = f_A$, $p_B \circ \varphi = f_B$:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_A"] \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[ddr, "f_B"'] & & A \\
& P \arrow[ur, "p_A"'] \arrow[d, "p_B"] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

În mod analog se defineşte produsul cartezian $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ (împreună cu $p_1, p_2, ..., p_n$).

Mai spunem, în acest caz că produsul cartezian se introduce (defineşte) prin intermediul unei proprietăți de universalitate. De obicei φ se mai notează $<f_A, f_B>$.

Schimbând sensul săgeților (ce reprezintă funcțiile) se ajunge la reuniunea disjunctă şi la conceptul de proprietate de couniversalitate (asupra acestei distincții se va reveni în - § 6).

În ceea ce priveşte noțiunea de grup, fie G o mulțime nevidă şi $f: G \times G \to G$. Asociativitatea revine la comutativitatea diagramei:

$$\begin{tikzcd}
 & G \times G \arrow[dr, "f"] & \\
(G \times G) \times G \;\Vert\; G \times (G \times G) \arrow[ur, "f \times 1_G"] \arrow[dr, "1_G \times f"'] & & G \\
 & G \times G \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

În mod similar se reformulează condițiile de: comutativitate, existență a elementului neutru ($e : \{*\} \to G$, unde $\{*\}$ reprezintă mulțimea “singleton”), inversabilitatea ($i : G \to G$), distributivitatea.

Se poate spune că această definiție este greu manevrabilă, însă aportul fundațional suplineşte acest aspect (ce în plus, măcar parțial, poate fi considerat o prejudecată).

Rafinând diagrama anterioară obținem:

Următoarele condiții sunt echivalente:

i) $f \cdot (1_G \times f) \cdot \langle p_1 \langle p_2, p_3\rangle\rangle = f \cdot (f \times 1_G)$;

ii) operația $*_\times$ definită pe $\{h: X \to G\}$, unde X este o mulțime oarecare, prin $h_1 *_\times h_2 = f \cdot \langle h_1, h_2\rangle$ este asociativă;

iii) $*_{A\times A\times A}$ satisface $p_1 *_{A\times A\times A} (p_2 *_{A\times A\times A} p_3) = (p_1 *_{A\times A\times A} p_2) *_{A\times A\times A} p_3$.

Avem şi că, de exemplu, următoarele condiții sunt echivalente:

i) $f \cdot \langle p_1, p_2\rangle = f \cdot \langle p_2, p_1\rangle$;

ii) $*_\times$ este comutativă;

iii) $*_{A\times A}$ satisface condiţia $p_1 *_{A\times A} p_2 = p_2 *_{A\times A} p_1$.

Am putea spune şi că acestă ultimă variantă transferă condiţii impuse asupra elementelor lui G (despre care se ştie doar că este o mulţime nevidă) în mulţimea $\{h : X \to G\}$ ale cărei elemente au semnificaţie şi chiar o anume concreteţe.

4. Demonstrațiile rezultatelor matematice

Propozițiile aparținând unor teorii matematice date sunt de două feluri: propoziții admise ca adevărate – numite axiome, şi propoziții denumite teoreme, leme, corolare sau pur şi simplu propoziții, ce rezultă adevărate în baza unor demonstrații (în continuare vom folosi doar termenul generic de *teoreme*). In general în acestea se afirmă că dacă una sau mai multe conditii denumite *ipoteza teoremei* sunt adevarate, atunci este adevarată *concluzia teoremei* (ce este alcatuită din una sau mai multe asertiuni). Pe scurt o teoremă este o implicație logică “$A \Rightarrow B$” adevarată.

În sens matematic larg, prin propozitie se intelege o asertiune ce poate fi adevarata sau falsa. In acest paragraf insa prin propozitie vom intelege cazul particular al asertiunilor de tipul “$A \Rightarrow B$”.

Precizam aici că, uneori enunțul unor teoreme nu pune în evidență cu claritate structura anterioară (se afirmă doar că o propoziție este adevarată).

Exemplu:

Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi din planul euclidian este de 180 ^{o}.

Reformulând însă acest enunț obținem varianta (echivalentă cu cea anterioară):

Dacă ABC este un triunghi (arbitrar) in planul euclidian, atunci $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^0$.

Dacă pentru o implicaţie (notăm A->B, sugerând astfel inexistenţa unei demonstraţii (încă)) există motive puternice să credem că este adevarată (de exemplu clase de cazuri în care implicaţia este adevarată), atunci implicaţia respectivă devine (este numită) conjectură. Pentru exemplificare amintim de conjectura lui Goldbach (orice număr intreg par se poate scrie ca suma a două numere prime impare) şi de (fosta) conjectură Fermat.

Vom incerca să răspundem (din nou) întrebărilor: *Ce este o demonstraţie? Ce înseamnă a înţelege o demonstraţie?* Putem spune că, prin demonstraţie (a teoremei $A \Rightarrow B$) se înţelege un şir finit de implicaţii (propoziţii) $A \Rightarrow A_1$, $A_1 \Rightarrow A_2$, ..., $A_n \Rightarrow B$, fiecare element al şirului fiind o implicaţie adevarată datorită uneia dintre urmatoarele trei circumstanţe:

este axiomă;

este deja demonstrată;

este o tautologie logică.

A înţelege o demonstraţie înseamnă a examina succesiv silogismele din care se compune şi a constata corectitudinea lor, dar nu numai. Trebuie să ne intereseze şi de ce silogismele se inlănţuie într-o anumită ordine şi nu în alta.

Atunci când ipoteza din cadrul unor implicaţii A->B conţine variabile (indeterminate), dând valori acestora se obţin cazuri particulare ale implicaţiei. Dacă se gaseste un caz particular în care aceasta este falsă, acest caz particular este numit contra-exemplu (în mod incorect se spune adesea că teorema este falsă deşi în cazul de faţă am avut o implicaţie ce aspiră doar la demnitatea de teoremă. In mod uzual demonstraţiile urmează una dintre schemele (pentru $A \Rightarrow B$):

1. metoda directă; se presupune A; printr-o secvenţă logică se conchide B.
2. reducerea la absurd; se presupune $\overline{B}$; printr-o secvenţă logică se conchide $\overline{A}$;
3. metoda contradicţiei; se presupun A şi $\overline{B}$; printr-o secvenţă logică se ajunge la o contradicţie ($P \wedge \overline{P}$).

Este evident că 2) este caz particular al lui 3), anume luând P = A.

Vom exemplifica prin:

Teoremă: **Fie** $x, y \in R$**. Daca** $x \neq y$**, atunci** $e^x \neq e^y$**.**

Demonstraţii.

D1) (metoda directă) $x \neq y$ implică x > y sau x < y. Considerăm doar cazul x > y (analog se lucrează şi în celalalt caz). Atunci există $r \in R, r > 0$ aşa încât x = y + r. Deci $e^x = e^{y+r} = e^y e^r$. Deoarece e > 1 şi r > 0, rezultă $e^r > 1$. Prin urmare $e^y e^r > e^y$. Rezultă că $e^x \neq e^y$.

D2) (reducere la absurd) Presupunând $e^x = e^y$ obţinem, logaritmând, x = y.

D3) (metoda contradicției) Presupunem $e^x = e^y$ şi $x \neq y$. Conform teoremei lui Rolle, există $z \in R, x < z < y$ aşa încât $e^z = 0$. Aceasta este o contradicție evidentă (funcția exponențiala ia valori strict pozitive).

Metoda 1) derivă direct din definiția conceptului de demonstrație, iar 2), respectiv 3) se bazează pe tautologiile $(p \Rightarrow q) \equiv (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ respectiv $(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \bar{q} \Rightarrow r \wedge \bar{r})$ cunoscute din logica matematică.

Cazurile descrise anterior nu epuizeaza posibilitățile de a deduce dacă anumite implicații sunt adevărate sau nu.

Amintim şi:

- utilizarea principiului inducției matematice;
- determinarea unor algoritmi;
- principiul lui Dirichlet (fie $k, n \in N$; dacă $kn+1$ obiecte sunt distribuite în n mulțimi, atunci cel puțin una dintre acestea va avea cel puțin k+1 obiecte);
- etc.

Incheiem cu câteva precizări legate de ceea ce numim demonstrație:

- este importantă conştientizarea contextului în care se edifică demonstrația (în legătură cu relativitatea adevărului matematic, anume cu axiomele teoriei ce constituie contextul considerat);
- se impune rejectarea din start a formulărilor neacceptabile, anume a acelora ce, atribuindu-li-se valori de adevăr, conduc la sofisme

(de exemplu “Epimende spune că minte” este inacceptabilă, în timp ce “Epimende minte” este o formulare acceptabilă);

- de remarcat că în $A \Rightarrow B$ nu se impun restricții semantice sau logice asupra lui A şi a lui B. De exemplu “$(0=1) \Rightarrow (\pi = 3)$” este o implicație adevarată. Acest aspect, aparent paradoxal se justifică astfel: pentru a demonstra $A \Rightarrow B$ în cadrul unei teorii T, se consideră de fapt o nouă teorie T' obținută din T prin adăugarea unei axiome, anume A (în mod oarecum mascat acest lucru se face înca de la primele cuvinte ale unei demonstrații: “presupunem că A este adevarată ...”). Dacă în cadrul teoriei T' se verifică validitatea lui B, atunci are loc $A \Rightarrow B$. Dacă A este propoziție falsă în T, atunci găsim că în T' au loc şi A şi A' şi deci în T' orice propoziție este adevarată, adică, de exemplu, alegând convenabil T $(0=1) \Rightarrow (\pi = 3)$ este adevarată.

Mai menționăm că “presupunem că are loc ...” este o formulare mai puțin “alarmantă” şi în consecință mai acceptabilă (de ce nu?) decât “dacă..., atunci...”. Numai că în acest fel, se maschează (prin mijloace retorice) trecerea de la T la T' (mai bine zis acceptarea acestei treceri) – nevinovată în matematică, dar prezentă şi printre armele sofiştilor şi demagogilor. Nu se poate încheia fără a spune (în mod triumfalist) că demonstrația aduce respectabilitate unui text matematic, vitalizează aserțiunile statice ale teoremelor. Demonstrația reprezintă chiar un ritual, o celebrare a puterii rațiunii şi dacă noțiunile “demonstrație” şi “matematică” nu coincid, atunci cel puțin, sunt inseparabile. Prima demonstrație matematică din istorie (cunoscută) i se atribuie lui Thales din Milet (600 i.C.), anume demonstrația faptului că un diametru împarte cercul corespunzător în două părți egale.

5. Ansamblismul în matematica

După cum se ştie, între primele concepte matematice apărute se întâlnesc: numărul şi configurațiile de linii şi puncte, anume, la începuturi, s-au dezvoltat, în paralel, aritmetica şi geometria. Se constată şi tendințe de unificare (atinse de ideea de absorbție şi nu de comuniune), astfel în şcoala pitagoriciana aritmetica era pe primul plan, în timp ce pentru şcoala platonică, geometria era ştiința dominantă.

Ulterior, prin Descartes, algebra tinde să aspire la supremație, ca apoi analiza infinitesimală să devină un serios candidat la acest titlu. Drept caracteristică, mai ales în sec. 18, alături de dezvoltarea intrinsecă a matematicii, putem remarca tendința de ierarhizare, clasificare (nu neapărat a domeniilor cât a rezultatelor matematice). Aceasta conduce la compararea matematicii cu un edificiu (pentru care foarte importante sunt şi temeliile sale).

Secolul 19 aduce cu sine preocupări intense cu privire la structura edificiului matematic, la bazele sale aşa încât studiul fundamentelor matematicii devine disciplina autonomă. In paralel se ivesc teorii noi (ex. teoria grupurilor), metode noi (ex. aritmetizarea analizei infinitesimale), iar investigațiile despre frontierele matematicii penetrează mecanismele gândirii dând astfel naştere logicii matematice. Dar cea mai spectaculoasa realizare a sec. 19 poate fi considerată teoria mulțimilor. La început aceasta a avut o formă elementară şi uşor formalizată (aşa numitul aspect naiv) datorată lui Dedekind şi Cantor. Ulterior Cantor a dezvoltat o parte neelementară, anume teoria numerelor transfinite. Existența unui hiatus între cele două părți şi încercările de a le lega prin metode axiomatice, a condus la numeroase controverse, crize şi a generat unele mari curente în matematică (logicismul, formalismul, intuiționismul – la care ne vom referi ulterior).

Pe de altă parte, dupa cum am văzut, activitatea matematică presupune şi o latură expozitivă. In cadrul acesteia teoria mulțimilor este vitală. In prezent, prin matematica ansamblistă se înțelege matematica exprimată (îmbrăcată) în terminologia, simbolismul şi conceptele proprii teoriei mulțimilor. Precizăm că în istoria matematicii putem decela o perioadă în care se încerca utilizarea limbajului geometric în afara geometriei. Putem pune aceasta pe seama faptului că atât geometria cât şi teoria mulți şi teoria mulți axiomatică. Avantajul teoriei mulțimilor constă atât în formalizarea cât şi în modul de abordare a conceptului de infinit.

Un impuls consistent pentru dezvoltarea matematicii ansambliste este dat de articolul despre infinit al lui D. Hilbert, din 1925, în care îşi manifesta încrederea în teoria mulțimilor. Incepând cu 1930 un grup de matematicieni francezi îşi propune să elaboreze un tratat care să prezinte riguros matematica actuală în context ansamblist. Semnează sub numele N. Bourbaki. Ediții definitive au început să apară în jurul anilor 1970.

Se admite însă că matematica ansamblista a parcurs şi momente de criză: 1900 – descoperirea paradoxurilor; 1905 – discuțiile privind axioma alegerii; 1930 – lucrările lui Godel asupra sistemelor formale. Intre adversarii teoriei mulțimilor amintim:

- H. Poincare – care spunea că tratarea ansamblistă are limitări clare ce provin dintr-un viciu pe care îl numea impredicativitate;
- şcoala olandeză a intuiționismului;
- Skolem, care în 1922, arăta că teoria axiomatică a mulțimilor admite un model numărabil, în timp ce Cantor arătase existența unui model nenumărabil;
- Alonzo Church acuză extensionalitatea (preponderentă în limbajul ansamblist).

Extensionalitate înseamna precizarea unui concept prin obiectele la care se referă sau se aplică conceptul respectiv (mai apare ca sferă, denotație, referință). In contrast cu aceasta, intensionalitatea indică notele caracteristice ale obiectelor subsumate unui concept (mai apare ca, sensul, conotația, comprehensiunea). Din punctul de vedere al polarității extensiune – intensiune, matematica se grupează în general în adepți ai primului (ex. Boole, Peano, Hilbert) sau al celui de-al doilea termen (ex. Leibniz, Galois, Bolzano) .

Problematica este departe de a fi epuizată. Cert este că, în paralel cu utilizarea pe scară largă a limbajului ansamblist, există şi încercări notabile de perfecționare a sa (Godel, Bernays, etc.) precum şi tentative consistente de schimbare a stilului de fundare a matematicii (teoria categoriilor inițiată de S. Eilenberg şi S. MacLane în 1948, teoria toposurilor). Anume, aşa dupa cum în teoria mulțimilor conceptul (primar) de mulțime precede (este primordial față de) cel de funcție, în teoria categoriilor acest raport se inversează. De altfel (în registru anecdotic) remarcăm că avem functie, fonction, function, etc. pe când în diverse limbi mulțimea este desemnată prin cuvinte diferite: mulțime, set, ensemble,...

Obiectele matematice se definesc atunci prin "legăturile" cu alte obiecte (morfisme) şi nu prin structura intrinsecă. In cazul structurilor algebrice (şi al construcțiilor ce operează cu acestea) mulțimea subiacenta este ceva mai puțin importantă, de interes sporit fiind "proprietățile de (co)universalitate".

Ne vom opri în continuare asupra unor aspecte citate anterior relative la momentele de criză ale matematicii ansambliste.

Răsfoind revista "Fundamenta Mathematicae" din 1924 întâlnim o afirmație surprinzătoare (ulterior numită paradoxul (nu în sensul de contradicție) Banach - Tarski): "este posibil să se împartă o sferă din spațiul tridimensional într-un număr finit de părți care, prin recompunere să formeze două sfere egale cu sfera inițială".

Trecând peste tentația facilă de a glosa despre demonstrația matematică a posibilității miracolelor, eventual despre găsirea unor metode de dublare a diverse lucruri concrete, vom prezenta explicația matematică a paradoxului. Sunt necesare câteva precizări preliminare. Cantor introdusese deja teoria numerelor cardinale în matematică şi devenise clar că dezvoltarea unei aritmetici şi pentru $\aleph_0$, c = $2^{\aleph_0}$... ar fi fost facilitată dacă s-ar fi putut arăta că orice mulțime poate fi înzestrată cu o relație de bună ordine (relație de ordine aşa încât orice submulțime nevidă admite un cel mai mic element); de exemplu, N este bine ordonată în schimb relația uzuală de ordine pe R nu este o relație de bună ordonare.

Zermelo, în 1904, arăta că orice mulțime nevidă poate fi înzestrată cu o relatie de bună ordonare, demonstrația bazându-se pe faptul că produsul cartezian de mulțimi nevide este nevid. Despre această ultimă aserțiune, Zermelo afirmă că este absolut evidentă şi nu necesită demonstrație. Evident că nu au lipsit nici criticile aduse afirmației anterioare (acestea au generat paradoxul lui Richard şi Berry: “cel mai mic numar care nu se poate defini cu mai puțin de 16 cuvinte este definit anterior cu 15 cuvinte”).

Se poate spune însă că Zermelo a stabilit o legătură între “înzestrarea cu relații de bună ordine” şi o anumită proprietate a produselor carteziene.

În sistemul axiomatic propus de Zermelo pentru teoria mulțimilor apare, în formulare echivalentă, proprietatea citată a produsului cartezian, formulare care într-o nouă exprimare este cunoscută sub numele de Axioma alegerii.

Acest sistem a fost revizuit (reelaborat) de A. Frankel (împreună cu Skolem şi von Neumann) şi este astăzi cunoscut sub numele desistemul ZF. Este adoptat un limbaj logic cu un plus de rigoare, sunt eliminate unele redundanțe, sunt schimbate, adaptate, sistematizate unele enunțuri şi se renunță la axioma alegerii.

În 1938, K. Gödel demonstrează că: dacă sistemul ZF este coerent, atunci este imposibil să se demonstreze enunțul numit Axioma alegerii.

De remarcat este însă faptul că Axioma alegerii sub forma echivalentă numită lema lui Zorn este esențială în demonstrarea teoremei lui Krull (existența idealelor maximale), teorema Hahn – Banach, teorema Tychonoff, etc.

Aceeaşi axiomă intervine şi în teorema Vitali care se referă (fără a da in procedeu explicit de construcție) la existența unor submulțimi ale mulțimii numerelor reale, care se sustrag oricărei măsuri. Ajungem astfel la punctul de plecare, "paradoxul" Banach – Tarski. În explicarea acestuia se utilizează aceleaşi argumente ca şi în cazul teoremei Vitali, precum şi teorema Hausdorff care afirmă că "în spațiul tridimensional o suprafață sferică S poate fi descompusă în patru părți nevide, disjuncte două câte două şi aşa încât trei dintre acestea să fie egale între ele şi, mai mult egale cu reuniunea lor" (în contrast total cu intuiția).

Demonstrațiile sofisticate utilizează, aşa cum am mai spus, axioma alegerii, proprietățile rotațiilor din spațiu, iar în cazul teoremei Banach – Tarski se face o proiecție a descompunerii Hausdorff.

Acceptând, în prima etapă, teorema Vitali, va trebui să acceptăm şi existența sferelor fără volum în spațiul tridimensional.

Iar de aici până la paradoxul Banach – Tarski nu e decât un pas. Au intervenit în mod esențial Axioma alegerii şi proprietățile rotațiilor sferei în spațiul tridimensional. Atunci în plan, rezultatul nu are corespondent. Putem spune, în concluzie anecdotică, faptul că nu pot fi multiplicate decât corpuri tridimensionale, nu şi bidimensionale (de exemplu, cele de hârtie).

6. Principiul de dualitate

Pentru început amintim că H. Poincare afirma că: "matematica este arta de a da acelaşi nume unor «lucruri» diverse", B. Russel scria că "... ceea ce interesează matematica ... nu e natura intrinsecă a «termenilor», ci natura logică a interrelaționărilor dintre aceştia", şi, în acest context M. Chasles (autor al celebrei "Aperçu historique sur l'origine et le developpement des methodes de la geometrie") conchide că "numeroasele situații de dualitate care se observă în legătură cu fenomenele naturale ... pot conduce la concluzia că dualitatea, o dublă unitate, constituie un adevărat principiu al naturii".

Exemplificăm în continuare semnificația şi consecințele unui aşa numit "principiu de dualitate" în matematică.

Se ştie că în geometrie au loc:

- O dreaptă şi un punct nesituat pe dreapta considerată determină (în mod unic) un plan (ce conține atât dreapta cât şi punctul amintit anterior).
- Un plan şi o dreaptă nesituată în plan determină (în mod unic) un punct (punctul de intersecție dintre plan şi dreaptă, eventual "punctul de la infinit") anume conținut atât de plan cât şi de dreaptă.

Este sesizabil faptul că enunțurile anterioare se obțin unul din celălalt prin schimbarea (reciprocă) a noțiunilor de punct şi plan;

păstrarea "cuvântului" dreaptă; înlocuirea reciprocă a conceptelor conține – a fi conținut.

Un alt exemplu relevă un alt tip de dualitate (paralelism în sens general şi nu în sensul special geometric):

- Două puncte distincte determină (în mod unic) o dreaptă (căreia îi vor aparține).
- Două drepte distincte (neparalele, coplanare) determină (în mod unic) un punct (ce aparține ambelor drepte).

O primă observație ce se poate face în acest caz pleacă de la ecuația dreptei în plan: $ax + by + c = 0$. Ecuația $ax + by + c = 0$ în necunoscutele x şi y conduce la (individualizează) coordonatele punctelor de pe dreaptă.

Considerând (x_0, y_0) coordonatele unui punct din plan, ecuația $ax_0 + by_0 + c = 0$ în necunoscutele a, b, c va furniza (prin soluțiile sale) ecuațiile tuturor dreptelor ce trec prin punctul considerat (adică fascicolul de drepte determinat de punctul respectiv).

Un traseu de aceeaşi factură poate fi urmat în cazul unei curbe algebrice, pentru care se asociază înfăşurătoarea algebrică.

În cazul conicelor enunțul dual celui ce afirmă că "tangenta la o conică intersectează conica înt-un singur punct (altfel spus în două puncte ce coincid)" este următorul: "cele două tangente dintr-un punct la o conică coincid dacă punctul aparține conicei".

Amintim şi teoremele Pascal şi Brianchon:

Teorema Pascal: Condiția necesară şi suficientă ca 6 puncte să aparțină unei conice este ca punctele considerate să constituie vârfurile unui hexagon Pascal (adică un hexagon pentru care punctele ce se obțin intersectând orice latură cu latura opusă sunt coliniare, eventual "punctul de la infinit").

Teorema Brianchon: Condiția necesară şi suficientă ca 6 drepte să fie tangente unei conice este ca aceasta să constituie laturile unui hexagon Brianchon (adică un hexagon pentru care dreptele ce unesc orice vârf cu vârful opus să fie concurente).

Conştientizarea unui principiu al dualității (mai exact al unei idei ce a evoluat continuu începând cu Menelaos , Euclid) poate fi atribuită, în egală măsură, lui Poncelet (1788 - 1867) şi lui Gergonne (1771 - 1859).

Poncelet indica prin "metoda planelor reciproce" dualitatea punct - dreaptă în plan.

Gergonne remarcă şi dualitatea punct – plan în spațiu (pâstrând neschimbat în enunțuri conceptul de dreaptă).

Amintim şi "legea de dualitate pe sferă" enunțată de Steiner: O teoremă relativă la un poligon sferic anume o relație privitoare la laturi, unghiuri, perimetru, arie, maxim, minim se transferă în altă teoremă în care elementele anterioare se substituie cu, respectiv, unghi, laturi, arie, perimetru, minim, maxim.

Dar nu numai în geometrie regăsim principiul dualității.

În teoria mulțimilor avem: într-o expresie (enunț) în care apar mulțimi, schimbând între ele $\cup$ şi $\cap$, $\varnothing$ şi U (mulțimea universală), $\subseteq$ şi $\supseteq$ se obține o expresie (enunț) numită duală a expresiei date.

Atunci în Algebra mulțimilor (guvernată de axiomele de idempotență, asociativitate, continuitate, distributivitate, $\emptyset$, U – elemente neutre, complementariere, legile lui De Morgan) avem că:

Duala unei teoreme este ea însăşi teoremă (Principiul de dualitate).

Aceeaşi situație se întâlneşte în cadrul logicii propoziționale şi în teoria laticelor.

Remarcăm că principiul de dualitate este o "teoremă despre teoreme" (altfel spus este o metateoremă).

Exemplificând cazul Algebrei mulțimilor (şi cazul analog al laticelor) avem:

1) $A \cup A = A$; 1') $A \cap A = A$;

2) $A \cup B = B \cup A$; 2') $A \cap B = B \cap A$;

3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; 3') $A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$;

etc.

Însă în ceea ce priveşte noțiunile de "imagine directă" şi "imagine inversă" în cazul submulțimilor vom avea:

Fie $f : A \to B$ o funcție şi $A_0 \subseteq A$, $B_0 \subseteq B$.

Numim imagine directă a lui A_0 prin f, submulțimea lui B, $f(A_0)$ dată de $f(A_0) = \{f(x) \mid x \in A_0\}$.

Numim imagine inversă a lui B_0 prin f, submulțimea lui A, $f^{-1}(B_0)$ dată de $f^{-1}(B_0) = \{x \in A \mid f(x) \in B_0\}$.

Într-un anume sens cele două noținui sunt duale una celeilalte. Dar

$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$;

$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;

$f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$;

$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

unde $A_1, A_2 \subseteq A$, iar $B_1, B_2 \subseteq B$.

Această "abatere de la dualitate" se extinde apoi în cazul funcțiilor injective, funcțiilor surjective anume: $f : A \to B$ este injectivă dacă şi numai dacă $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, în timp ce o condiție similară pentru cazul funcțiilor surjective nu există.

Acelaşi tip de situații mai poate fi întâlnit şi în, de exemplu, topologie şi nu numai.

În fine, în cazul teoriei categoriilor reapare principiul dualității (de exemplu, limite injective – limite proiective). Se substanțiază astfel conexiuni profunde între diverse construcții matematice, conexiuni ce sunt insesizabile în cazul definițiilor clasice.

Un exemplu în acest sens este constituit de diada produs cartezian – reuniune disjunctă.

În termeni categoriali produsul direct a două obiecte A, B este un obiect (îl notăm $A \times B$) împreună cu două morfisme $p_A : A \times B \to A$, $p_B : B \times A \to B$ aşa încât pentru orice obiect X şi $f_A : X \to A$, $f_B : X \to B$ există şi este unic un morfism $\varphi: X \to A \times B$

aşa încât $p_A \circ \varphi = f_A$, $p_B \circ \varphi = f_B$. În cazul categoriei mulțimilor se regăseşte astfel produsul cartezian $A \times B$.

Prin sumă directă a obiectelor A şi B se înțelege un obiect (îl notăm $A \oplus B$) împreună cu două morfisme $i_A : A \to A \oplus B$, $i_B : B \to A \oplus B$ aşa încât pentru orice obiect Y şi $g_A : A \to Y$, $g_B : B \to Y$ există şi este unic un morfism $\psi: A \oplus B \to Y$ aşa încât $\psi \circ i_A = g_A$, $\psi \circ i_B = g_B$. În cazul categoriei mulțimilor, $A \oplus B$ nu este altceva decât reuniunea disjunctă a mulțimilor A şi B.

Este evident că cele două construcții anterioare se pot obține una din cealaltă prin aşa numitul procedeu al "inversării săgeților" (cu întreg cortegiul de consecințe pe care îl are această operație). Acesta ar fi punctul central al dualismului categorial.

În acelaşi spirit, în teoria modulelor vom avea: module injective – module proiective; sume directe, produse directe de module şi morfisme de module, etc.

În teoria laticelor , la nivelul noțiunilor, amintim de dualitatea ideal – filtru şi de faptul că nu avem un paralelism absolut (rezultate "în oglindă") în cazul noțiunilor duale.

Revenind la teoria categoriilor, aplicând metoda "inversării săgeților" unei categorii C se obține o categorie C^0 numită categorie duală a categoriei date.

7. Infinit –infinitezimal

Din multitudinea de aspecte ale problemei infinitului, problema care a constituit una dintre marile teme ale gandirii europene si a nelinistit mai profund decat oricare alta spiritul uman, sunt prezentate in cele ce urmeaza unele repere evolutive esentiale.

Primele idei asupra infinitului au aparut la filosofii presocratici la care gandirea si explicatia rationala a lumii au inceput sa se desprinda de gandirea arhaica mito-poetică. Primul termen in care se regasesc (dupa Aristotel sau Theofrast) aspecte ale infinitului este ”*apeironul*” lui Anaximandru care a fost identificat cu „*indeterminatul ca marime*”. Mentionam totusi ca multi alti ganditori au atribuit „*apeironului*” doar acceptia calitativa de „*indeterminat*”, Lucian Blaga, de exemplu, considerand ca apeironul „*este ceva indefinit, ceva anterior oricarei forme si oricarei stari de agregare substantiala. Apeironul este amorful in sens absolut*”.

In aceasta prima perioada, de pana la Zenon din Elea, se apreciaza in general ca infinitul apartinea filosofiei naturii si fizicii, nu insa si matematicii, considerandu-se, ca prima etapa a teoretizarii matematice a infinitului, perioada de la Aristotel pana la mijlocul secolului trecut.

Aristotel distinge doua acceptii ale “*infinitului*”: infinitul ca substanta si infinitul ca principiu si propune o sistematizare a speciilor infinitatii, distingand intre infinitul extensiv („*cu privire la aditie*”) pe care insa nu-l admite „*pentru substanta sensibila*”, infinitul intensiv („*cu privire la diviziune*"), infinitul potential si infinitul actual (pe care nu-l admite, insa nici pentru marimi nici pentru numere). Infinitul potential sau „*constructiv*" se refera la posibilitatea de a repeta indefinit o operatie, ceea ce conduce la notiunea de sir infinit sau la divizarea la nesfarsit a unui segment, iar infinitul actual sau „*existential*" inseamna nu numai constatarea lipsei de marginire ci are si functia de intregire, de cuprindere a unui sir nelimitat de marimi concepute ca existand simultan.

Amintind ca lungimea diagonalei patratului cu latura de 1 m (pe care o putem calcula doar cu aproximatie 1.4, 1.41, 1.42,…) este data de un sir infinit (format de rezultatele precedente) sir care se reprezinta prin simbolul $\sqrt{2}$ putem spune, de asemenea, ca infinitul are, in acest context, si functia de a lega intre ele conceptele de numar rational si irational (numere a caror aparitie a stat la baza declansarii unei crize a matematicii grecesti, antice).

Revenind la Aristotel, dintre problemele de interes matematic pe care el le examineaza in legatura cu infinitul si continuul, se pot enumera: "*daca continuul poate fi infinit divizibil; daca infinitul exista, si in ce sens;cum poate fi definit infinitul* ?"

In general, modul in care a pus problemele Aristotel a determinat cadrul conceptual si metodologic al studiului infinitului pentru o indelungata perioada istorica.

Conceptul de infinit potential a dominat stiinta si filosofia pana la Cantor si, respectiv, Hegel. El a fost considerat singura specie valabila de Locke, Descartes, Spinoza, Hobbes, Berkeley. În acelaşi timp infinitul actual a fost sustinut de Platon, N.Cusanus, G. Bruno, Hegel, Bolzano, Cantor.

Noi rezultate remarcabile (o nouă etapă) în dezvoltarea problematicii abordate în acest paragraf au fost aduse de G. Leibnitz şi Imm. Kant.

In metafizica si matematica lui Leibniz infinitul joaca un rol central. Continuand opera lui Bruno, Campanella si Descartes, Leibniz, în intelegerea relatiei dintre infinitatea actuala si ceea potentiala, aplica principiul continuitatii extras din generalizarea unor practici matematice, anticipand linii esentiale ale formularii hilbertiene a problemei infinitului. Pentru Kant planul analizei si sursele sale inspiratoare vor diferi esential de cele ale lui Leibniz. Infinitul este acceptat ca o „ideea regulativa" a ratiunii pure, anume ca o modalitate de a orienta cunoaşterea spre cuprinderea generalului fără a fi însă, el însuşi obiect al cunoaşterii. Constructivismul fundamental al teoriilor stiintifice precum si intelegerea rationalist iluminista a fiintei umane fac posibilă apropierea noțiunii kantiene a infinitului de aceea tradițională a infinitului potențial.

Desi ideea potentialitatii infinitului ramane o permanenta de la Aristotel (trecand prin Leibniz si Kant) pana la Hilbert si Brouwer, trebuie totusi observata transformarea treptata a semnificatie "potentialitatii": de la cea ontologica aristotelica, la cea gnoseologica kantiana.

O adevarata povocare la adresa stiintei este reprezentata de conceptia hegeliana asupra infinitului. Hegel intelegea "infinitul adevarat" ca devenire dar „devenire determinata, nu abstracta”, ca proces; potentialitatea infinitului are sensul de prindere in unitatea lor prin masura a calitatii si cantitatii.

Dintre filosofii sau matematicienii din epoca moderna si contemporana cu reale contributii la dezvaluirea unor aspecte ale infinitului pot fi amintiti Husserl, Heidegger, Whitehead (tentativa de revitalizare a ontologiei), Hilbert, Gödel, etc.

In matematica notiunea de infinit are un rol central in analiză, disciplina numita de D. Hilbert „simfonia infinitului”. Problemele analizei matematicii au pus pe primul plan operatia de trecere la limita fapt ce conduce la un ascendent al infinitului potential relativ la infinitul actual. De exemplu, Leibniz inlocuieste egalitatea “statica” cu egalitatea “dinamica” egalitatea putând fi considerata ca o inegalitate infinit de mica pe care o putem face sa se apropie de egalitate oricat dorim. Apare astfel intelegerea infinitului (un "infinit mare" şi un "infinit mic") ca un proces dinamic care se dezvaluie in miscarea finitului si poate fi inteles numai in cadrul acestei miscari.

Paradoxurile care au aparut insa, in legatura cu acest calcul numit infinitesimal, au dus la crearea unui nou limbaj matematic, "dialectica lui N si ε ", pe baza caruia infinitul mare sau mic au fost eliminati din matematica, in sensul ca toate enunturile in care figurau au fost reduse la relatii intre marimi finite. Definitia limitei datorată lui Cauchy a discernat cu precizie ceea ce ii este propriu de ceea ce ii este strain, infinitul fiind redus la „un simplu mod de a vorbi” dupa cum spunea Gauss (ce admitea doar infinitul potențial). Ulterior a aparut necesitatea folosirii unor forme de deductie logica in care sa se faca referiri la «toate» numerele reale cu anume proprietate, la «existenta» unor numere reale cu anume proprietate, etc. Astfel, „infinitul actual” se reintoarce in analiza matematica (datorita lui Weierstrass). Vechile paradoxuri ale antichitatii au reaparut astfel, odata cu infinitul actual. Numai ca acum sunt alte conditii de dezvoltare a stiintei: incepe sa se intrevada faptul ca refuzand sa se faca din propozitia ”totul este mai mare decat partea” un criteriu al realului nu este contrazisa decat aritmetica si nu avem dreptul de a conchide de aici ca am cadea intr-o contradictie absoluta.

Cel care a combatut cu inversunare tendintele de aritmetizare si a atribuit dreptul de cetatenie in matematica infinitului actual a fost G. Cantor. Esenţială a fost şi contribuţia lui Hilbert care prin programul dezvoltat (la care au contribuit, printre alţii, şi Ackermann, P. Bernays, J. von Nemmann) propune fixarea pentru orice sistem (teorie matematică) a unui fundament propriu (axiomele) şi a regulilor de raţionament; cerinţa fundamentală pentru orice sistem constând în intrinseca coerenţă (absenţa contradicţiilor). Mai mult până la apariţia teoremelor lui Gödel (asupra cărora vom reveni în paragraful următor) se cerea ca această corenţă să fie confirmată (autocertificată) de sistemul însuşi. În această perspectivă matematica infinitului a lui Cantor (sistem formal coerent) îşi găseşte locul (este validată) alături de celelalte teorii matematice. Cantor, examinând ce se intelege cand spunem ca doua multimi au acelasi numar de elemente a constatat ca aceasta nu inseamna nimic mai mult decat ca intre ele se poate realiza o corespondenta biunivoca. Se obtine astfel definitia echipotentei multimilor si a numarului cardinal. Apoi urmeaza constatarea fundamentala, ca in aceasta definitie, finitudinea multimilor considerate nu apare în nici un fel: definitia se poate aplica deci la fel de bine multimilor finite si celor infinite.

Amintim şi că, descoperind bijecția ce există intre latura unui pătrat şi pătratul însuşi (ca mulțimi de puncte), G. Cantor i-a transmis rezultatul lui Dedekind, cu următorul comentariu: “Văd, dar nu cred”.

In acest context Dedekind a propus ca definitie logica a multimilor infinite proprietatea de a fi echipotente cu o parte proprie a lor. In aceasta definitie insusirea de „infinit” este degajata de toate proprietatile incidentale pe care ea le poate prezenta in cazuri particulare. Ea descrie sub o forma sintetica faptul ca intr-o multime foarte mare de obiecte indepartarea unuia dintre ele este practic insesizabila. Originea experimentala, practic-istorica a notiunii de infinit, faptul ca ea reflecta unele aspecte ale realitatii obiective explica adecvarea ei la real, teoria cantoriana a mulțimilor devenind un instrument indispensabil in toate domeniile matematicii moderne.

Antinomiilor care au aparut ulterior si privesc anumite laturi ale teoriei multimilor li s-a incercat a li se da o rezolvare prin metode axiomatice, logice sau intuitioniste.

Intr-o incercare de sistematizare am putea spune ca spectrul semnificatiilor infinitului se intinde de la idea matematica a infinitatii (nelimitatul, nemarginirea, continuitatea, repetabilitatea etc.) pâna la acele expresii accentuat simbolice, valorizante ale existentei, tinand mai degraba de un „sentiment al lumii” (transcendența, intuiția, etc.).

Revenind (totuşi) în domeniul matematic vom reaminti că mulțimile numerice **N, Z, Q** se află în bijecție ($f:$ **Z** $\to$ **N**, $f(x)=\begin{cases}2x, & dac\breve{a} \quad x\geq 0;\\ -2x-1, & dac\breve{a} \quad x<0\end{cases}$ este o bijecție, sistematizând numerele raționale pozitive $0/1, 1/1, 1/2, 2/1, 1/3, 3/1, 1/4, 2/3, 3/2, 4/1, \ldots$ obținem bijectie între **N** şi **Q**$_+$ şi apoi între **N** şi **Q**).

Însă între **N** şi **R** nu există nici o bijecție (nici o funcție $f:$ **N** $\to$ **R** nu poate fi surjectivă: pentru

$f(1)=0,a_{11}a_{12}a_{13}\ldots.;$
$f(2)=0,a_{21}a_{22}a_{23}\ldots.;$

numărul $0,a_{11}a_{22}a_{33}\ldots.$ nu are contraimagine relativă la f).

Amintim şi că nu există bijecție între A şi $\mathsf{P}(A)$ pentru nici o mulțime A.

Apare atunci problema: dacă între cardinalul lui **N**, $\aleph_0$, şi cardinalul lui **R**, c (sau $2^{\aleph_0}$), există alte numere cardinale.

Ipoteza continuului, în formulare cantoriană, afirmă că: “Orice submulțime infinită a lui **R** este sau în bijecție cu **N** sau în bijectie cu **R**”. Însă despre acestă ipoteza s-a arătat doar că nu se poate demonstra negatia ei (Godel, 1938) şi că nu poate fi demonstrată ca atare (Cohen, 1963) în contextul teoriei mulțimilor Zermelo – Frankel (chiar acceptând axioma alegerii).

Se impune, poate, o rafinare a instrumentelor de studiere a infinitului (care, de exemplu, să permită discernerea şi între mulţimi aflate în bijecţie ...).

8. Logică, limbaj

Limbajul (scris, oral, simbolic ...) constituie un instrument principal de transmitere a informațiilor. Mai mult, în matematică limbajul este şi un instrument de cercetare (de exemplu, limbajul algebric, limbajul categorial, etc.) dar şi un obiect de cercetare. În învățământ se impune şi ca limbajul să realizeze echilibrul între rigoare şi exigențele didactice.

Din acest punct de vedere este utilă o comparație între limbajul uzual şi limbajul matematic. Concluziile se vor impune de la sine. În ceea ce priveşte limbajul uzual remarcăm existența omonimiei şi importanța factorului timp (ce nu apar în cadrul limbajului matematic).

De exemplu:

i) pentru p = "am ieşit", q = "am mers la cursuri" nu are loc $p \wedge q = q \wedge p$;

ii) pentru p = "plouă", q = "iau umbrela" nu are loc $p \Rightarrow q \equiv \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$;

iii) pentru "orice triunghi isoscel are o axă de simetrie dar nu are un centru de simetrie" cuvântul "dar" în cadrul limbajului matematic poate avea sensul de "şi", în timp ce în limbajul uzual reprezintă o atenționare.

O situație ceva mai complexă este dată de exemplul obținut din tautologia "$(p \Rightarrow q) \vee (\rceil p \Rightarrow q)$", pentru p = " n e număr par" şi q = “n e număr”, unde este necesară implicarea corectă a cuantificatorilor.

Continuând seria exemplelor amintim că adesori apare formularea “... atunci în mod necesar există ...” în cadrul căreia sintagma “în mod necesar” este superfluă.

În legătură cu formularea “două câte două” (exemplu “mulţimi două câte două disjuncte”) putem spune că are un sens precis în varianta din paranteză, dar precizia se pierde, de exemplu, în “rădăcinile ecuaţiei ... sunt două câte două conjugate”.

În acelaşi sens se pot comenta enunţurile: “un triunghi ce are două unghiuri egale este isoscel” şi “ două triunghiuri cu două unghiuri egale sunt asemenea”.

Recursul la rigoare şi filtrarea logică a discursului educaţional rezolvă favorabil situaţiile anterioare.

Revenind la consideraţiile generale asupra limbajului ca posibil model al lumii, putem spune că matematică furnizează scheme pentru multe astfel de modele (care exprimă prin intermediul enunţurilor şi relaţiilor dintre enunţuri fapte şi relaţii între fapte).

Oricât ar părea de straniu între diada ipotetic – deductiv (relativă la gândirea matematică şi binomul libertate – necesitate există legături mult mai profunde decât ar părea la prima vedere).

Din punct de vedere didactic un exerciţiu util constă în formalizarea matematică a unor situaţii concrete şi descrierea prin cuvinte uzuale a unei figuri geometrice, formule, etc.

Alte aspecte asupra cărora se impune o mai mare atenţie ţin de:

– utilizarea cuantificatorilor (când “un” din limbajul uzual reprezintă cuantificatorul universal şi când îl reprezintă pe cel existenţial);
– utilizarea simbolului de implicatie “$\Rightarrow$” cu sensul de conectiv (implicaţia propriu - zisă) sau cu sensul de “atunci” (deducerea unui fapt din altul, deja consumată);
– cuvântul “şi” care poate corespunde uneori intersecţiei şi alteori reuniunii sau poate fi interpretat drept conectiv logic.

De exemplu, sensurile lui “şi” din

- numerele naturale care sunt multipli de 2 **şi** de 3;
- elipsele **şi** hiperbolele sunt conice;
- 2 este par **şi** 3 este impar

sunt evident diferite (între ele).

Într-un context general unele aspecte abordate anterior pot fi studiate din punctul de vedere al sistemelor semantice (semantica fiind conform definiţiei clasice, “ştiinţa semnelor şi a vieţii lor în societate”). Crearea semnelor matematice, a limbajului matematic, ca act de comunicare se bucură de câteva trăsături distinctive: polisemia (se va reveni asupra acestui aspect în §12, atunci când se va vorbi de sinonimia infinită a limbajului ştiinţific); determinarea obiectelor ca “elemente ale claselor de echivalenţă semnificate de semnele corespunzătoare” (aceasta fiind relaţia dintre semn şi obiect semnificat – şi nu aceea spusă în registru anecdotic, din exemplul “fumul semnifică existența focului”).

Polisemia poate fi legată şi de diversele etape ale percepției şi acumulării în procesul de învățare. De exemplu, cercul (de rază 1) se reprezintă pentru “$x^2 + y^2 = 1$”, “$| z | = 1$”, “S^1”, etc.

Relevanța din punctul de vedere al didacticii matematice este dată şi de faptul că “semnele matematicii” reprezintă instrumente ale minții în desfăşurarea activităților în care este implicată şi, în plus, medierea între aceste semne şi obiectele de referință depinde de aceste activități şi de contextul (local, global) în care sunt utilizate “semnele” (exemple: “fie x, y numere prime”, respectiv “(x, y) coordonate într-un text de geometrie analitică”).

Revenind la exemplul din §3 (conceptul de fracție) se poate justifica şi aserțiunea că simbolurile (semnele, reprezentările) şi creează (cel puțin parțial) contextul (şi nu sunt doar subordonate aprioric unui context). Simbolurile asociate părților unui întreg (uşor reprezentabile geometric), conduc, prin analogie, la simbolul de fracție. Se ajunge la un “context” în care se introduc operații şi reguli (însă abilitatea de a mânui fracțiile nu probează şi însuşirea conceptului de număr rațional).

Se impune apoi saltul către corpul de fracții al unui domeniu de integritate.

Precizăm şi faptul că posibilitatea de a da reprezentări echivalente aceluiaşi obiect matematic este implicată în procesul de conceptualizare ca obiectiv didactic major.

Mai mult, conştientizarea unor legături între diverse “registre semantice” pate fi benefică (de exemplu, legătura între simbolurile numerelor fracționare şi numerele zecimale, sau trecerea de la un cadru la altul, cum ar fi trecerea grup – inel – corp prin procesul de “îmbogățire”).

Cele anterioare au în vedere ipostazele (condițiile) în care se poate înțelelge mai bine matematica.

Din punctul de vedere al profesorului de matematică sunt importante şi: – precizarea distincției între semnificația metaforică particulară (de exemplu, “un triunghi”) şi cea generală (de exemplu, “orice triunghi”); - interacțiunea între “subiectul receptor” şi cadrul social căruia acesta îi este aparținător; - aspecte precum cel general (contextul desfăşurării activității de expunere a matematicii), interpersonal (statutul şi identitatea parrticipanților) sau operațional (modul de prezentare); - găsirea unor conexiuni surprinzătoare care să faciliteze construirea ideilor matematice (de exemplu legătura dintre grupul diedral D_4 şi structura unor relații tribale evidențiată în [16]); - relevarea unor interacțiuni între nota dominantă a culturii tradiționale a unui popor şi apetența pentru anumite aspecte ale matematicii; - rolul computerelor în realizarea de conexiuni între realitatea “actuală” şi cea “virtuală”, etc.

9. Logicism, intuitionism, formalism

Filosofia generala a inregistrat trei conceptii cu privire la universalii (notiunile generale)-realismul, conceptualismul si nominalismul- care reapar in secolul al XX-lea in filosofia matematicii sub numele de logicism, intuitionism si formalism. Acest transfer de la filosofie la matematica moderna a fost admirabil surprins de J.Hadamard atunci cand nota: “iata un fenomen straniu, fara precedent in istoria gandirii, o stiinta care a ajuns in starea pozitiva revine la starea metafizica. Iar aceasta stiinta este cea mai veche si cea mai exacta dintre toate-este matematica “.

Logicismul reprezinta punctul de vedere al realismului in filosofia matematicii. Precizam doar ca „realismul” deriva din doctrina lui Platon ce afirma ca entitatile absolute au existenta independenta de mintea noastra. Atunci conceptele se descopera nu se construiesc. Reformuland se evidentiaza elucidarea problemei constructibilitatii acestora. Dezvoltat de G. Freege si B. Russell, logicismul isi trage numele din faptul ca incearca sa deduca pe cale logica, pornind numai de la notiunile de teoria multimilor si fara sa se bazeze pe vreo axioma specific matematica, nu numai aritmetica, dar si intreaga matematica. Logicistii ar fi reusit sa convinga daca nu s-ar fi descoperit paradoxurile din teoria multimilor. Mai mult, aspectul acesta, logicist, al matematicii nu se poate identifica cu intregul domeniu matematic fiindca, desi matematica este logica, ea nu este numai logica, adica o vasta tautologie, ci mai este si altceva,

altceva care ii permite sa se dezvolte si sa se depaseasca mereu si in mod nebanuit.

O alta tentativa de a dezlega taina fundamentelor matematicii este constituita de formalism. Putem spune că întemeietorul acestei scoli, David Hilbert, si-a propus sa inlature orice indoiala cu privire la rigoarea rationamentului matematic, prin introducerea unui numar finit de simboluri, cu ajutorul carora sa reduca toate teoriile matematice la operatii formale intre aceste simboluri lipsite de orice semnificatie in afara de axiomele prin care au fost introduse. Hilbert a încercat să dea astfel o metoda formalizata si pe de-a-ntregul axiomatizata, cunoscuta sub numele de „teoria demonstratiei", in care independenta si consistenta axiomelor să fie garantata prin analiza matematica a sistemelor de simboluri considerate.

Dar aceste incercari nu au dus la succesul sperat deoarece caracterul finit al rationamentelor matematice l-a condus pe K.Godel la descoperirea ca prin metode finite nu se poate stabili necontradictia aritmeticii elementare.

Mai exact examinând problema coerenței, în sensul găsirii mijoacelor de a o demonstra, Gödel ajunge la rezultate complet opuse aşteptărilor lui Hilbert. Fie aşadar un sistem (formal) aşa încât:

a) admite o mulțime finită de elemente primitive (simboluri, axiome, reguli de deducție);
b) include aritmetica (şi în particular teoria numerelor);
c) este coerent.

Drept exemple de astfel de sisteme amintim: aritmetica, sistemul ZF, Principia matematica (Russell - Whitehead).

Are loc:

Teorema de incompletitudine a lui Gödel (I): În orice sistem formal ce satisface a), b) şi c) există propoziţii indecidabile (propoziţii p pentru care nici p nici $\overline{p}$ nu pot fi demonstrate pe baza axiomelor şi a regulilor de deducţie).

Demonstraţia se bazează pe posibilitatea de a eticheta propoziţiile sistemului (în particular şi cele ce privesc numerele naturale) cu numere naturale.

Următoarea teoremă de incompletitudive a lui Gödel (II) afirmă că, în contextul anterior, nici un sistem formal nu este capabil de autocertificare (de a se demonstra propria coerenţă în cadrul sistemului).

Numeroase au fost comentariile ce au însoţit în timp aceste teoreme. Se afirma că, din punct de vedere metafizic, ele demonstrează că "omul este o fiinţă limitată, dar conştientă de limitele sale". În acelaşi registru se înscrie afirmaţia lui Pascal: "Ultimul pas pe care îl poate face raţiunea este să recunoască faptul că există o infinitate de lucruri (în sens ideal) ce o depăşesc".

Mai amintim că Andre Weyl spunea că teoremele lui Gödel demonstrează atât existenţa lui Dumnezeu cât şi a Antichristului: "Dumnezeu pentru că matematica e coerentă şi antichristul pentru că nu putem demonstra coerenţa ei".

Intuitionismul defineste existenta matematica prin constructie, acceptand numai obiectele construite in intuitia pura care se autorealizeaza pe ele insele. Admitand ca o propozitie matematica este valabila numai daca este însoțită de o metoda practica prin care sa se stabileasca sau sa se construiasca obiectul respectiv, intuitionismul nu prețuieşte nici demonstratiile logice si nici axiomatizarea formalista .

Dintre precursorii intuitionismului pot fi amintiti: Kant, care in “Critica ratiunii pure” afirma ca “judecatile matematice sunt toate sintetice si bazate pe intuitie”; H. Poincare, care a adaugat la cele sustinute de Kant ca “rationamentul matematic are in el insusi un fel de virtute creatoare si prin urmare se deosebeste de silogism”; L. Kronecker, care spunea ca “ar trebui ca toate cercetarile matematice , oricat de profunde ar fi, sa se poata exprima sub forma simpla a proprietatilor numerelor naturale”; H. Lebesgue: ”a arata cum se construieste matematica inseamna a-i studia fundamentele dar dintr-un punct de vedere care ne scoate dincolo de domeniul logicii”.

Constructibilitatea este, deci, exigenta centrala a acestui program fundationist, in virtutea caruia este exclus infinitul actual (= o multime infinita considerata ca existand sub forma unei colectii incheiate inaintea oricarui proces de generare sau de construire a acestei multimi) si este acceptat infinitul potential sau constructiv. Confruntarea acestor doua tipuri de infinit matematic, crede fondatorul intuitionismului L. E. J. Brouwer, constituie radacina paradoxurilor si de aceea toate eforturile sale au fost centrate pe clarificarea naturii acestui concept de infinit. A fost criticata teoria multimilor pentru introducerea in rationamentul matematic a infinitului actual, care a condus la aplicarea fara discernamant a principiului tertului exclus. Acestea precum si alte observatii au condus catre o noua logica, intuitionista, construita pe ipoteza ca numai principiul contradictiei este valabil intotdeauna, pe cand principiul tertului exclus se aplica numai in cazul multimilor finite. Propozitiile logice intuitioniste admit trei valori: adevarul, falsul, si indiferenta; este asadar o logica trivalenta.

Cercetarile au fost continuate de A. Heyting si in ultima vreme de Everett Bishop, care au adus elemente noi, dand intuitionismului o larga aplicatie in diverse domenii ale matematicii.

Totusi, ca si celelalte curente discutate anterior, intuitionismul s-a marginit sa aprofundeze o anumita fata a matematicilor, rezultatele lui, oricat de interesante ar fi, reflectand doar acest singur aspect pe care l-a considerat - constructibilitatea.

10. Spațiu – timp; geometriile neeuclidiene

Ideea de spațiu, idee pe care omul şi-a format-o în contactul său zilnic cu natura şi de care face uz în practica sa cotidiană a evoluat în strânsă legătură cu dezvoltarea, în primul rând, a ideii de timp, apoi de mişcare şi materie şi în genere, în contextul general al dezvoltării fizicii şi astronomiei.

În antichitate problema spațiului se punea, în primul rând, sub forma problemei locului. Arhitas din Tarent, din şcoala lui Pitagora avea ideea locului ca fiind "prima dintre existențe", ceva distinct de corpuri şi independent de ele. În concepția atomistă a materialiştilor antici, vidul – spațiu neumplut – există ca o condiție necesară a mişcării atomilor. Această idee este exprimată cu pregnanță de Lucrețiu în *Poemul naturii*: "Iarăşi spun, neființând acel loc, acel spațiu pe care vid îl numim, nici un corp n-ar putea să se afle în vreo parte ori să se mişte cumva în natură pe căi felurite".

Concepția lui Aristotel este oarecum diferită. După el spațiul este suma locurilor pe care le ocupă corpurile, iar locul este delimitarea unui corp de către alte corpuri din jurul său. Precum se vede, Aristotel nu identifică spațiul cu vidul: vidul fiind "nimic", nu poate exista în sensul propriu al cuvântului. Conform cu concepția sa asupra materiei, pe care o consideră finită, Aristotel consideră şi spațiul ca fiind finit. Este necesar, în acest context, de a concepe universul ca posedând un reper fix, imobil, în raport cu care să se poată vorbi, de exemplu, de mişcarea aştrilor. În concepția lui Aristotel acesta este Pământul.

Cu totul deosebit de această viziune este spațiul geometric euclidian. Geometria euclidiană presupune o abordare a spațiului adecvată mecanicii, pe care, multe secole mai târziu, o vor dezvolta Copernic, Galilei şi Newton. Geometria euclidiană care a tins să reconstituie într-o structură rațională ansamblul cunoştințelor geometrice din epoca respectivă presupune existența unui spațiu infinit, continuu, omogen şi izotrop. Explicitând înseamnă să spunem că în acest spațiu distanța dintre două puncte este aceeaşi, oricare ar fi sistemul de referință în care această lungime este măsurată (aceeaşi unitate de măsură), şi că orice abatere (a spațiului) de la omogenitate şi izotropie este de natură negeometrică (fizica a interpretat aceste abateri ca fiind pricinuite de prezența unor câmpuri de forțe ale căror proprietăți trebuie de altfel să fie conforme legilor newtoniene ale mişcării). Mai departe, acest spațiu "clasic" are o metrică universală, ceea ce înseamnă că distanțele şi unghiurile stau în raporturi univoc determinate, în orice parte a universului, ele fiind independente de poziția în univers a sistemului de referință în care se face măsurătoarea precum şi de distanțele reciproce între sisteme de referință deosebite.

În fine, spațiul clasic are o metrică universală absolută specială, şi anume cea euclidiană, care conduce, între altele, la: suma unghiurilor unui triunghi este întotdeauna egală cu 180^0, laturile triunghiului putând fi gândite, de pildă, ca raze de lumină ce se propagă în spațiul “gol”.

Ansamblul proprietăților enumerate face din spațiul clasic nu o formă (fundamentală) de existență a materiei, ci un “conținător” independent de prezența sau absența acesteia, întrucât poate fi gândit tot atât de bine “plin” sau “gol” (de corpuri).

Conceptul clasic al spațiului este nedialectic, ca şi conceptul clasic al timpului: ambele sunt gândite independent de materie.

Dacă acest concept de spațiu a fost acceptat ca evident de-a lungul atâtor secole, aceasta se datoreşte faptului că oglindea proprietăți valabile, în prima aproximație, ale formelor fundamentale de existență a materiei, aşa cum rezultau din experiența dobândită în practica curentă, care ne pune în contact cu corpuri de dimensiuni mijlocii (de ordinul de mărime al dimensiunilor umane, intermediare între cele ale microscosmosului atomic şi cele ale macrocosmosului astrofizic), corpuri înzestrate cu viteze mici (în raport cu viteza luminii).

Concepția newtoniană, bazată pe geometria euclidiană, a dominat până la începutul secolului nostru. Dar chiar în grandioasa construcție a lui Newton, în aparență atât de armonioasă, existau germenii propriei negații. Teoria ondulatorie a luminii şi cea a câmpului electromagnetic, datorate lui Maxwell şi Faraday au scos în evidență fisurile concepției. Problema modului în care se realizează influența la distanță a maselor materiale – influență care traversează spații vide – devenea tulburătoare. Este repusă astfel pe tapet cu o nouă vigoare concepția eterului, soluție de compromis, mediu care ar umple întreg spațiul, sediu al acțiunilor dinamice care traversează spațiul, al fenomenelor ondulatorii, al câmpurilor electromagnetice şi gravitaționale. Toate încercările de a afla proprietățile acestui mediu ipotetic au rămas infructuoase ajungându-se, pe măsura dezvoltării cunoştințelor fizicii la ceea ce A. Einstein a numit "marea descoperire a lui H. A. Lorenz": spațiul fizic şi eterul nu sunt decât expresii diferite ale aceluiaşi lucru; corpurile sunt stări fizice ale spațiului.

Încă înainte de aceste descoperiri, Lobacevski, Bolyay şi Riemann prevăzuseră în mod genial noile căi pe care urma să se dezvolte ştiința. Elaborarea geometriilor neeuclidiene are în vedere faptul că spațiul real nu corespunde cu concepția unui cadru rigid, omogen, absolut pasiv în raport cu fenomenele fizice. Structura spațiului este dependentă de fenomenele fizice şi, la rândul ei, influențează aceste fenomene.

Aceste idei îşi vor găsi aplicație mult mai târziu, în cadrul teoriei relativității generale.

Teoria relativității restrânse creată în 1905, porneşte – dacă ne referim la construcția logică – de la critica ideii de simultaneitate (nu putem afirma că două evenimente sunt simultane decât în raport cu un anumit sistem de referință). Având în vedere mişcarea relativă a sistemelor de referință, dependența măsurătorilor de această mişcare (deci de timp), teoria relativității restrânse legitimează continuumul cvadridimensional spațiu-timp. În acest continuum spațiul şi timpul nu se mai pot separa fără a denatura desfăşurarea reală a fenomenelor.

Un pas mai departe în restructurarea concepției despre spațiu (şi timp) l-a constituit teoria relativității generalizate. Faptul fundamental (neglijat de către predecesorii lui Einstein) care a condus la aceasta se poate exprima astfel: “Într-un câmp de gravitație omogen, toate mişcările se produc ca în absența unui câmp de gravitație, în raport cu un sistem de coordonate animat de o accelerație uniformă”.

De aici a urmat în mod logic concepția curbării razei de lumină într-un câmp gravitațional suficient de intens. De aici decurg consecințe importante pentru spațiu şi timp. Pe baza particularităților spațiului şi timpului descoperite de teoria relativității generalizate, au fost evidențiate însuşiri precum: curbura, structuralitatea spațiului, dependența spațiului şi timpului de gravitație, dependența reciprocă a spațiului şi timpului.

Am putea vorbi deci, rezumând, despre trei mari etape în evoluția ideii de spațiu (şi, binențeles, de timp):

- Antichitatea în care se ciocnesc două orientări principale: cea a lui Democrit, Epicur, Lucrețiu (spațiul vid, infinit, izotrop) şi cea a lui Aristotel (spațiu finit, neomogen, anizotrop). Învingătoare a fost concepția lui Aristotel care a dominat până, inclusiv, în Evul Mediu.
- Epoca modernă, cu cristalizarea concepție newtoniene a spațiului absolut ca un cadru infinit, continuu, omogen, izotrop şi care face

corp comun cu geometria euclidiană. Momentul newtonian a fost pregătit de progresele fizicii şi mecanicii din timpul Renaşterii, de "revoluția copernicană", de ideile lui Gassandi asupra spațiului ca întindere vidă, parțial umplută de materie şi independent de materie, etc.

Concepția newtoniană a coexistat în epocă cu cea kantiană conform căreia spațiul nu este, de fapt, propriu "lucrului în sine", ci doar fenomenului, ca realitate accesibilă subiectului datorită activității constructive a acestuia prin care "lucrului în sine" i se conferă o structură organizată, cognoscibilă. Spațiul, în concepția lui Kant, este în acelaşi timp real (în sensul că este prezent în orice experiență a noastră cu lumea externă) şi ideal, empiric şi transcendental, spațiul este aprioric şi conferă caracter de necesitate adevărurilor geometrice, şi în acelaşi timp este intuiție, reprezentare şi nu noțiune; apare ca o proprietate comună tuturor lucrurilor din realitate, proprietate conceptibilă independent de orice obiect material.

- Concepția relativistă a unui continuum spațio-temporal cvadridimensinal, neomogen, anizotrop, structurat în dependență de câmpul gravitațional, concepție căreia îi corespunde geometria neeuclidiană.

Se ştie că în geometria lui Euclid figurează aşa-numitul "postulat al paralelelor", care exprimă că printr-un punct dat nu se poate duce decât o singură paralelă la o dreaptă dată, adică o singură dreaptă situată cu aceasta în acelaşi plan şi care să nu o întâlnească.

Timp de mai bine de 2000 de ani, toate eforturile geometrilor de a deduce acest postulat din celelalte axiome aşezate de Euclid în fruntea *Elementelor* sale au dat greş.

Dar, la începutul secolului trecut, geometrul rus Lobacevski (şi aproape concomitent Ianos Bolyay) negând postulatul lui Euclid în sensul că se acceptă ca printr-un punct să se poată duce mai multe paralele la o dreaptă dată şi păstrând celelalte axiome a dedus un sistem de propoziţii perfect coerent, construind astfel o geometrie a cărei logică impecabilă nu e cu nimic inferioară celei a geometriei euclidiene (fapt demonstrat, de altfel, ulterior cu toată rigoarea). Teoremele sunt, bineînţeles, foarte diferite de acelea cu care suntem obişnuiţi şi au darul de a ne descumpăni puţin la început deşi, repetăm, noul edificiu este la fel de solid şi de sigur (din punct de vedere logic) ca şi cel al geometriei clasice.

Astfel, suma unghiurilor unui triunghi este totdeauna mai mică decât 180^0, iar diferenţa dintre 180^0 şi această sumă este proporţională cu suprafaţa triunghiului. Este imposibil să se construiască o figură asemenea cu o figură dată, dar de dimensiuni diferite, etc.

Este evident că trebuie să avem în vedere că ideea de "plan" din geometria neeuclidiană este cu mult mai generală decât ceea ce ne sugerează imaginea fizică a unui zid, de exemplu, sau a suprafeţei unei ape liniştite.

Noţiunea geometrică de "plan" este adevărat că a avut drept punct de plecare imagini analoage cu aceea a zidului, dar prin abstractizare s-au lăsat la o parte mai multe din atributele speciale ale imaginii concrete decât se pare la prima vedere şi s-a înglobat astfel în conceptul abstract format un număr mai mare de forme decât s-ar părea. Suprafaţa pe care este valabilă geometria lui Lobacevski este, printre ele, cu aceleaşi drepturi ca şi suprafaţa zidului.

Aşadar, dacă toate atributele conceptului abstract de plan geometric sunt şi idei (tot abstracte, dar la un grad mai mic) ivite din imaginea zidului şi a apei liniştite, inversa nu are loc. Rolul postulatului al V-lea este tocmai de a particulariza conceptul de "plan" astfel ca să coincidă cu această idee. Dar, dacă în locul acestui postulat îl introducem pe cel al lui Lobacevski, particularizarea se face într-o altă direcţie şi merge spre alte forme concrete.

O altă variantă de particularizare, de asemenea utilă teoriei relativităţii generalizate, este dată de Riemann care nu numai că a negat postulatul lui Euclid (în sensul că printr-un punct dat nu se poate duce la o dreaptă nici o paralelă), dar a renunţat şi la prima axiomă ("Prin două puncte nu se poate duce decât o singură dreaptă"). În geometria lui Riemann (cel puţin în una din formele sale) există cazuri excepţionale în care prin două puncte vor putea trece o infinitate de drepte. Există un fel de opoziţie între geometria lui Riemann şi cea a lui Lobacevski-Bolyay. Astfel, suma unghiurilor unui triunghi (egală cu 180^0 în geometria lui Euclid, mai mică decât 180^0 în geometria Lobacevski-Bolyay) este mai mare decât 180^0 în geometria lui Riemann. Numărul paralelelor care pot fi duse printr-un punct la o dreaptă este egal cu 1 în geometria euclidiană, este zero în geometria lui Riemann şi este infinit în geometria lui Lobacevski-Bolyay.

Adăugăm că spaţiul lui Riemann, la fel de acceptabil ca şi cele ale lui Euclid sau Lobacevski, este de natură sferică, adică este finit deşi fără limite în sensul că nu i se va putea găsi niciodată capătul dar i se va putea face înconjurul.

Prima consecinţă de ordin filosofic a acestor descoperiri a fost dispariţia concepţiei eronate că axiomele geometriei constituie adevăruri apriori dovedindu-se că ele sunt un simplu fapt de experienţă, fapt adevărat şi verificat în unele cazuri, neadevărat în altele. S-a arătat astfel cât de legată de realitatea lumii exterioare este ştiinţa matematică cu tot gradul înalt de abstractizare al noţiunilor ce-i stau la bază.

De o şi mai mare importanţă este, însă, observaţia că o anumită geometrie corespunde numai anumitor condiţii ale spaţiului fizic în care materia este distribuită într-un anume fel, care posedă deci o anumită formă materială. Dependenţa geometriei de corpurile fizice dovedeşte tocmai dependenţa formelor spaţiale de conţinutul lor material. Spaţiul nu mai este o formă goală, o formă apriorică a gândirii noastre; noţiunea de spaţiu rezultă din existenţa materială a tuturor corpurilor din natură, ea nu există independent de ele. Nu putem studia proprietăţile geometrice ale unui corp independent de condiţiile fizice, deşi în geometrie asemenea condiţii nu intervin explicit. Dar axiomele pe care le punem la baza geometriei exprimă implicit aceste proprietăți, ele caracterizează fiziceşte obiectele studiului nostru geometric.

11. Matematica si filosofia

Pe lungul drum al cunoasterii realitatii, in cursul istoriei lor milenare, matematica si filosofia s-au influentat reciproc, istoria relevand indubitabil faptul ca o reinnoire a fundamentelor uneia a atras repercursiuni inevitabile asupra celeilalte (nu o data in evolutia gandirii omenesti, filosofia si-a structurat conceptiile „more geometrico”, furnizand apoi o fundamentare logic-conceptuala riguroasa matematicii), conexiuni foarte stranse stabilindu-se inca din antichitatea elena. Amintim, in acest context, ca Platon a creat o filosofie inspirata de matematica, in care notiunea de relatie este fundamentala si a carei ultima varianta, teoria Ideilor-Numere, a fost expusa de Aristotel in a sa Metafizica. Platon sustinea ca exista obiecte eterne, independente de mintea noastra pe care le numim”unu”,”doi”, etc - formele aritmetice-sau, pe care le numim „punct”,”linie”, etc. - formele geometrice. Exista deci o lume a formelor-obiecte definite, atemporale, independente fata de spirit – care se deosebeste de lumea perceptiei senzoriale, fiind accesibila numai prin ratiune.

In opozitie (partiala) cu Platon, Aristotel respinge distinctia dintre lumea formelor , considerata ca adevarata realitate, si aceea a experientei senzoriale, care trebuie inteleasa numai ca aproximare a lumii formelor. El subliniaza deseori ca posibilitatea de abstractie nu implica de loc existenta independenta a ceea ce este sau poate fi abstras. Rezultatele abstractiei matematice ar constitui dupa Aristotel, obiecte matematice despre care se pot face cel putin doua afirmatii care nu suscita controverse:

a) fiecare din ele se afla, intr-un anumit sens, in lucrurile din care este abstras ;

b) exista o multiplicitate de obiecte, de exemplu exista atatea unitati aritmetice, cazuri de doi, trei, etc. si atatea cercuri, linii, drepte, etc. cate sunt necesare in calcul sau într-o demonstratie geometrica. Analizand celelalte trasaturi ale obiectelor matematice, de exemplu relatia dintre un obiect anume si unitatea matematica, suntem condusi la concluzia ca procesul de abstractie la Aristotel este de fapt o abstractie idealizanta sau idealizare mai mult decat abstractie pur si simplu. Am putea spune ca, in timp ce Platon sustinea ca matematica se ocupa de forme sau, folosind un termen echivalent de idei existente independent de matematician, Aristotel sustine ca matematica se ocupa cu idealizarile efectuate de matematician. Aristotel acorda, de asemenea, mult mai multa atentie decat Platon structurii teoriilor intregi din matematica, ca opuse propozitiilor izolate. Astfel, el face o distinctie neta între:

1. principii comune tuturor stiintelor (cum am spune astazi principiile logicii formale presupuse in formularea si dezvoltarea deductiva a oricarei stiinte);

2. principii speciale;

3. definitii, care nu presupun insa ca ceea ce se defineste exista, de exemplu definitia punctului lui Euclid (ca ceva ce nu are parti);

4. ipoteze existentiale, care presupun ca ceea ce a fost definit exista, independent de gandirea si perceptia noastra.

Importanta lui Aristotel in istoria filosofiei matematicii nu rezida, insa, numai in adaptarea conceptiei lui Platon la metafizica si nici numai in atenția pe care o acorda analizei structurilor matematice. De o importanta mai mare decat acestea este formularea detaliata pe care el o da problemei infinitului. El a fost primul care a vazut cele doua moduri principale de analiza a notiunii de infinitate, ca actuala sau numai ca potentiala. El este si primul care s-a declarat categoric in favoarea celei de a doua alternative.

Asa cum facusera inaintea sa Platon si Aristotel, Leibniz a dezvoltat o filosofiei a matematicii, el fiind autorul unui sistem metafizic de mare frumusete si profunzime. Citam, spre a expune precis si succint, un pasaj din Monadologie in care Leibniz, cu doi ani inainte de moarte, in 1714, da un rezumat al filosofiei sale: “ Exista, spune el, de asemenea doua feluri de adevaruri, cele de rationament si cele de fapt. Adevarurile de rationament sunt necesare, iar opusul lor este imposibil, adevarurile de fapt sunt contingente si opusul lor este posibil. Cand un adevar este necesar, ratiunea sa poate fi gasita prin analiza, descompunandu-l in idei si adevaruri mai simple pana ajungem le cele ce sunt primare.” Adevarurile ratiunii sunt atunci, dupa cum spune Leibniz, fundamentate pe „principiul noncontradictiei” aflat in stransa legatura cu principiul identitatii si cu cel al tertului exclus. Pentru Leibniz toate axiomele, postulatele, definitiile si teoremele matematiciii sunt adevaruri ale ratiunii si in consecinta veridicitatea propozitiilor matematice rezulta din aceea ca negarea lor ar fi practic imposibila. Analizand propozitiile logicii si matematicii Leibniz are ideea metodologica de a introduce calculul in toate disciplinele ce trateaza si conexiuni deductive (de exemplu, arimetizarea logicii) impunandu-si programul de a inventa un simbolism si o metoda de “formare si aranjare a caracterelor si semnelor incat acestea sa reprezinte ganduri, adica sa fie legate intre ele asa cum sunt gandurile corespunzatoare.”

Sub influenta acestei filosofii rationaliste, avand ca principali reprezentati pe Leibniz si Descartes, precum si sub a celei empirice reprezentate de Hume si totodata in opozitie constienta fata de ambele filosofii, si-a dezvoltat Kant sistemul sau filosofic. Propozitiile aritmeticii pure si ale geometriei pure sunt, in conceptia kantiana, propozitii necesare şi universale. Cu toate acestea, ele sunt propozitii apriori, sintetice, nu analitice. Ele sunt sintetice pentru ca sunt despre structura spatiului si timpului, structura care se dezvaluie prin ceea ce poate fi construit in ele, si sunt apriori pentru ca spatiul si timpul sunt conditii invariante ale oricarei perceptii a obiectelor fizice. Propozitiile matematicii aplicate sunt aposteriori (empirice) in masura in care ele sunt despre materialul empiric al perceptiei si sunt apriori (neempirice) in masura in care ele sunt propozitii despre spatiu si timp. Matematica pura are ca obiect de studiu structura spatiului si timpului independenta de materialul empiric. Matematica aplicata are ca obiect de studiu structura menționată impreuna cu materialul care o umple.

In plus, Kant nu va admite ca o descriere completa a structurii spatiului si timpului sa solicite numai o contemplare pasiva. Ea presupune activitatea de constructie. ”A construi un concept” inseamna a-l dota cu un obiect apriori. Trebuie amintita aici distinctia intre gandirea unui concept matematic care reclama numai coerenta interna, si constructia sa, care cere ca spatiul perceptual sa aiba o anumita structura. Aceasta notiune kantiana de constructie ca sursa de reprezentati ai conceptelor matematice, a caror coerenta interna este asigurata, presupusa sau cel putin necontroversata, are multi descendenti identificabili in dezvoltarile ulterioare din filosofia matematicii. Analiza infinitatii facuta de Kant si problema daca trecerea de la notiunea de infinitate potentiala constructiva la notiunea de infinitatea actuala neconstructiva este ceruta, dezirabila, criticabila sau indiferenta este o probleme care divide scolile contemporane de filosofie a matematicii.

Mai amintim aici ca si Descartes a construit o filosofie in care procedeaza prin anologie cu matematica. Urmasul lui Descartes, Spinoza a tratat etica „more geometrico”.

In fata filosofilor din toate timpurile, faptele matematicii au stat ca piloni de neclintit ai cunoasterii pozitive. Mereu au incercat sa gaseasca in metodele si continutul matematicii acel drum care duce la rezultate sigure, mai convigatoare si mai exacte decat deductiile extrase din cuvintele problematice utilizate, in general, de filosofie. Au facut aceasta, dupa cum am vazut, Platon, Descartes, Spinoza, influenta ei se poate observa la Kant si aceeasi idee pluteste in fata filosofilor contemporani, cand apeleaza mereu la matematica. In vremea de azi neopozitivismul s-a inspirat din logica matematica pentru a edifica propria sa filosofie. "Scopul filosofiei, spune Wittgenstein, este clarificarea logica a gândurilor”. Renasterea metafizica, la care asistam azi, dezminte insa prognosticul logic pozitivist ca şi solutia reducerii filosofiei la o sintaxa logica a stiintei. Spre deosebire de filosofie, care ramane totusi o teorie si o intelepciune asupra totului, matematica poate apare ca un rezervor de forme abstracte –structurile matematice –golite voit de orice continut si de aceea adaptabile la orice continut. Dar, ea trebuie sa propuna filosofiei idealului ei de claritate, precizie si exactitudine.

O sarcina comuna a filosofilor si matematicienilor este analizarea teoriilor matematice, consideratiile filosofice (altfel spus, argumentele metafizice) avand deosebita influenta mai ales atunci cand teoriile respective au scopul de a fauri bazele matematicii. Numeroasele pledoarii existente pentru competenta filosofiei in studiul fundamentelor matematicii precum si evolutia istorica a investigatiilor fundationale, indreptatesc filosofia la un rol major in acest domeniu. Marile "impasuri" sau "crize" precum aparitia numerelor irationale, a geometiilor neeuclidiene si indeosebi a paradoxurilor –au stimulat si intretinut efortul si reflectia filosofica, au relevat rolul analizei filosofice, al solutiilor si al ipotezelor filosofice.

12. Matematica si arta (sau arta si matematica)

1. (In loc de) Preliminarii

Du musst verstehn!
Auch Eins macht Zehn
Und Zwei lass gehn
Und Drei macht gleich,
So bist du reich
Verlier die Vier!
Auf Funf und Sechs,
So sag die Hex,
Mach Sieben und Acht
So ist's vollbracht:
Und Neun ist Eins
Und Zehn ist Kein
Das ist das Hexen-Einmal-Eins.

J.W.Goethe (Faust)

Geometrie! Algebre! Arithmetique! Zone!
Ou l'invisible plan coupe la vague cine,
Ou l'asymtote cherche, ou l'hyperbole finit.
Cristalisation du prisme dans la nuit:
Mer dont le polyedre est l'affreux madrepore.
Nuee ou l'univers en calculs s'evapore .

V. Hugo

Qual e’l geometra che tutto s’affige
Per misurar la cerchio, e non ritruova,
Pensando quel principio ond' egli indige.

Dante

(Divina Comedia)

La cercle [est:]
Cadran, blanche prison des heures,
Soleil, fleur brulante du jour,
Lune, au variable contour,
Table des aimantes demeures,
Assiette, aux tres naifs emaux,
Margelle des puits aux eaux fraiches,
Roue elegante des caleches,
Roue envirme des tomberaux.
Cycle des temps qui nous separent
Implacablement du passe,
Faites qu’autour de moi soit trace
Un cercle etroit d’amities rares.

H.Allorge

(L’ame geometrique)

It is a feeling not uncommon amongst artists, that in their greatest works they are reavealing eternal truths which have some kind of prior etherial existence ... but the case for believing in some kind of etherial eternal existence, at least for the more profund mathematical concepts, is a good deal stronger than in other cases .

Roger Penrose

(The Emperor's New Mind)

Abordarea relatiilor de conexiune, a interferentelor, a influentelor reciproce, a elementelor comune in diada matematica-arta (sau arta - matematica) poate fi facuta dintr-o multitudine de puncte de vedere intre care amintim:

- utilizarea structurilor, relatiilor si tehnicilor matematice in realizarea, organizarea si structurarea operelor de arta (literatura, muzica, pictura, sculptura ,arhitectura etc.);
- evidentierea inefabilului unor rezultate matematice;
- asemanari /deosebiri de constructie, de arhitectura, de limbaj, de finalitate etc.;
- decelarea referirilor la concepte matematice din diverse opere artistice si, nu in ultimul rand, a rolului artei in invatarea matematicii;
- studiul comparativ al diverselor opinii din literatura de specialitate relative la problematica amintita anterior.

Discutia poate fi desfasurata in plan teoretic (semantic si/sau hermeneutic; al lecturilor recursiv-generative) fie in cel, mai imbietor, al exemplificarilor.

In cele ce urmeaza vom incerca o incursiune in punctele de inalta interferenta dintre matematica si arta exemplificand, teoretizand dar mai ales invitand la reflectie (constructiva).

2. Numarul de aur. Sirul lui Fibonacci

Ne vom referi in continuare la numarul de aur $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Se poate vorbi de un instinct al numarului ϕ apartinand tuturor fiintelor umane. Marturie stau experientele fondatorului psihofizicii, filosoful german Fechner pe de o parte si, pe de alta parte, prezenta acestui numar in structura atator opere de arta. Inca din antichitate o marturie, de exemplu, atribuita lui Herodot pretinde ca aria patratului avand ca latura inaltimea piramidei lui Keops este egala cu aria oricarei fete laterale. In acest caz raportul dintre apotema fetei piramidei si apotema bazei este riguros egal cu ϕ . Remarci similare se pot face in legatura cu Parthenonul si, mai mult, constatam ca proportiile corpului uman, si nu numai, asculta in unele aspecte fundamentale de numarul de aur .

Numarul de aur a fost studiat in scoala lui Pitagora. Platon aminteste in "Dialoguri" de acest numar, iar problema a II-a din Cartea a II-a a Elementelor lui Euclid conduce la numarul ϕ.

Ulterior statutul acestuia pentru caile creatiei artistice s-a diversificat: pe de o parte artistul se indreapta instinctiv spre anumite structuri, pe de alta parte el efectueaza in mod deliberat anumite alegeri. Mai exista si posibilitatea "intermediară" ca autorul sa constientizeze post-factum unele dintre schemele operei sale, chiar daca ele nu au intrat inițial în atentia sa.

Cercetarea marilor opere de arta, in special in domeniul artelor vizuale, e preocupata de gasirea unor trasee sau scheme pe care s-ar sprijini intreaga compozitie, bazate pe nodurile si liniile esentiale puse in evidenta de o anume lectura a operei. In acest context numarul de aur isi face din plin simtita prezenta.

In asa numitele ”Caiete ale numarului de aur" (autor Elisa Maillard) cu ajutorul lui ϕ sunt "citite" opere de Botticelli, Gericault etc.. Pietro della Francesca, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Serusier, le Corbusier, etc au folosit cu buna stiinta acest numar.

Numeroase sunt studiile ce ii sunt dedicate. Acestea probeaza cvasiuniversalitatea preferintei naturii (cu precadere cea organica) pentru numarul de aur ce pare sa exprime un deziderat organic al naturii si al omului, unul dintre acele elemente pe care probabil omul le are in comun cu orice fiinta cugetatoare din univers.

Nu ne vom referi la prezenta numarului de aur in lumea vegetala (fenomen detectat prima oara de Kepler) sau animala, insa trebuie sa mentionam ca simetria pentagonala definita de ϕ da nastere unei periodicitati dinamice si structureaza pulsatiile crescande ale unei spirale logaritmice. Amintind si de conexiunea dintre ϕ si sirurile de tip Fibonacci, (şiruri$(F_n)_{n\in \mathbf{N}}$ pentru care $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) regasim aceasta succesiune in deformarea intervalelor in muzica, in domeniul versificatiei, in domeniul structurilor narative (ex. Sota Rustaveli).

Se cuvine sa menționăm tratatul “De Divina Proportione” al lui Fra Luca Pacioli di Borgo (cu ilustratiile datorate lui Leonardo Da Vinci), pe Vitruviu, pe D’Arcy Thompson (autorul cartii "On growth and form", 1917), pe R.Huyghe cu "Formes et forces. De l' atome a Rembrandt" (Flammarion, Paris, 1971), etc.

Mai putin cunoscute sunt cartile lui Matila Ghyka: "Esthetique des proportions dans la nature et dans les artes” (N.R.F. Paris, 1926), "Le nombre d’or. Rites et rythmes pytagoriciens dans le developpement de la civilisation occidentale I, II” (N.R.F. Gallimard, Paris, 1931).

Profesor de estetica la Londra (pana la moartea sa in 1965) si fost ambasador al Romaniei la Londra, Matila Ghyka este un pionier al teoriei matematice a ritmulului. Distinge intre ritmurile reversibile, care se dezvolta in durata (muzica, poezie) si sunt emanatii directe ale experientei traite si ritmurile spatiului (arhitectura si plastica), domeniu al reversibilului si al continuului.

Cea mai importanta regularitate decelabila in acest context este cea data de sirul lui Fibonacci si de numarul de aur. Natura si arta se supun unor restrictii de o mare severitate, dar aceste restrictii nu sunt vizibile cu ochiul liber. Numai invatind sa le cunoastem putem supune la randul nostru materia si limbajul pe care il folosim (intelegand aici limbajul artistic), aceasta ar fi o concluzie a studiului intreprins de Matila Ghyka. R. Huyghe îl situeaza pe M. Ghyka drept unul dintre cei mai importanti continuatori ai lui D’Arcy Thompson care, la randul sau, este autorul primei viziuni moderne asupra proceselor de crestere a formelor .

Eforturile lui Matila Ghyka se indreapta si spre evidentierea rolului teoriei grupurilor in cercetarea estetica, spre ceea ce astazi numim "gramatici" si procedee generative, etc.

In legatura cu sirul lui Fibonacci si numarul de aur, vom mai aminti ca $\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + ..}}$, ceea ce ii confera o situatie singulara remarcabila in teoria numerelor.

O sinteza a proprietatilor lui ϕ este facuta de Paul Montel in "Revue d'esthetique". Ne marginim sa mai remarcăm ca $\phi^{n-1}+\phi^{n} = =\phi^{n+1}$, ceea ce spune ca sirul $(\phi^{n})_{n\geq 0}$ reprezinta un sir de tip Fibonacci. Amintind ca sirul lui Fibonacci se defineste recurent astfel $F_0=0$, $F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2,}$ (este şirul de tip Fibonacci pentru care primii doi termeni sunt 0 şi 1) obtinem ca :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}} = \phi$$

Sirul $(F_n)_{n\geq 0}$ are si proprietatea $(F_n,F_m)=F_{(n,m)}$, unde (x,y) noteaza cel mai mare divizor comun al numerelor x si y. O aceeasi proprietate se intilneste in cazul sirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n=2^n-1$, $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n= X^n -1$. Un sir $(b_n)_{n\geq 0}$ pentru care daca n si m nu se divid unul pe celalalt, atunci $(b_m, b_n)=1$ se numeste sir Dedekind. Se remarca faptul ca pentru $(a_n)_{n\geq 0}$ are loc $(a_n,a_m) = a_{(n,m)}$ daca si numai daca exista un unic sir Dedekind $(b_n)_{n\in N}$ asa incat $a_n = \Pi_{d/n}\, b_d$ (produsul facandu-se dupa toti divizorii naturali ai lui n). Mai mult, $(b_n)_{n\in N}$ este dat de

$b_n = \prod_{d/n} a_d^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)}$, unde μ noteaza functia lui Möbus, $\mu: N^* \to \{-1,0,1\}$. Ar fi interesant de stiut in ce regularitati sau repetitii generative se regaseste sirul asociat sirului Fibonnaci prin $b_n = \prod_{d/n} F_d^{u\left(\frac{n}{d}\right)}$.

O alta problema deschisa este cea a generalizarii conceptului de "raport de aur" obtinind "dreptunghiul de aur" sau “paralelipipedul da aur”. In primul caz am avea un dreptunghi pentru care raportul marimilor a doua laturi(neparalele) este ϕ, iar in cel de-al doilea caz paralelipipedul de dimensiuni a, a, ϕ a , cu a numar natural nenul.

3. Inefabilul in matematica

O vasta trecere in revista a rezultatelor matematice ce se bucura de indubitabile valente in a provoca emotia estetica si care incorporeaza trasaturi specifice operelor de arta ar trebui sa cuprinda:

- teorema de incompletitudine a lui Gödel;
- formula lui Euler: $e^{i\pi} - 1 = 0$;
- spirala logaritmica descrisa de R.Descartes si sudiata de J.Bernoulli;
- teorema lui Gauss relativa la numerele prime.

Nu pot fi uitate (desi nu le vom mai enumera) atatea rezultate din teoria numerelor precum si, de exemplu, patratele magice ori triunghiul lui Pascal ce face legatura cu coeficientii dezvoltarii binomiale (Newton). In domeniul interrelationarilor se cuvin a fi amintite dualismul intre figuri geometrice si ecuatii (“*Ideea,* *posibilitatea de a exprima o linie, o curba in termeni algebrici, printr-o ecuatie imi pare la fel de minunata precum <Iliada>*“ spunea Edgar Quinet), interdependenta intre “arie” si tangenta la o curba: tangenta intr-un punct la o curba este data de derivata functiei ce descrie curba, in timp ce aria delimitata de curba (si axa absciselor si paralele la axa ordonatelor) se exprima analitic prin integrala functiei (dar integrarea nu este alceva decat “operatia inversa” diferentierii) .

Ferdinand le Lionnais aseamana trecerea de la, de exemplu,

$dy/dx = 1/(a^2-x^2)$ la

$y = 1/2 * \ln|(a+x)/(a-x)| + C$ cu transformarea unei crisalide in fluture.

Nu pot lipsi din sirul exemplificarilor, functia zeta a lui Riemann, cicloida, banda lui Möbus, legatura intre raportul dintre lungimea unui arc si diametrul sau si unele serii de numere, functiile continue fara derivata (desi C. Hermite spunea “*I turn with fright and horror from this lamentable plague of continuous functions having no derivations*”), analiza siturilor (in ansamblu), teoria fractalilor etc.

Sub accelasi semn al esteticului ca element comun al artei si matematicii se inscriu si diverse metode de demonstratie, de definire si organizare a conceptelor (de exemplu conicele, cuadricele) si insasi dezvoltarea simfonica armonioasa a matematicii ca intreg. Reluarea unor teme, colaborarea intre diverse compartimente orchestrale este comuna atit muzicii cit si matematicii. Aducem ca argument teoria grupurilor introdusa in domeniul ecuatilor algebrice (E.Galois), in geometrie (F. Klein). Este deja clasic urmatorul citat (cf. E. Borel) "*when Klein makes us see that the algebrac theory of equation of the fifth degreee is notable simplified by a prior study of the propreties of the regular icosahedron and that this comparison also permits a fruitful study of certain Differential equation of the second order, we are lost in admiration at how this overall view iluminates the scattered facts*".

Oarecum in acelasi context se inscriu succesivele distilari ce au dus la extragerea din geometria metrica a geometriei euclediene, a geometriei proiective, a geometriei algebrice, topologiei.

In fine putem face referiri la lucrari publicate (considerate ca entitati). Remarcam sclipirile lui Riemann, metoda de constructie matematica a lui Weierstrass, etc.

Citam doar pe Mittag Leffler care spunea "*the best workes of Abel are true lyric poems of subline beauty whose perfection of form allows the profundity of his thought to show through, while at the same time filling the imagination with dream visions of a remote world of ideas raised further above life's commonplace and emanating more directly from the very soul than any poet, in the ordinary sense of the world, could produce*". Amintim si ca Donald Knuth, unul dintre cei mai mari specialisti in programarea calculatoarelor si-a intitulat celebrul sau tratat "*The Art of Computer Programming*" si este un fervent sustinator al ideii ca matematica insasi ar fi o arta prin ceea ce are ea mai valoros.

4 . Relatii generale de complementarietate/ similtitudine

Utilizam termenul de *complementarietate* ce ni se pare mai potrivit in locul celui de *dihotomie* care circula indeobste in literatura de specialitate, atunci cand se intreprinde o comparatie intre limbajul stiintific si limbajul artistic. Intre "opozitiile" valide sugerate de G. D. Birkhoff (inca in 1928, "Quelques elements mathematiques de l'art", "Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna, p. 315-333, 1928), de Matila Ghyka (despre care am amintit anterior), de Pius Servien (pe numele adevarat Serban Cioculescu, autor al unei carti deseori citate: "Principes d'esthetique. Problemes d'art et language des sciences", Boivin, Paris, 1932-1935) intre limbajul artistic (cu precadere cel poetic) şi limbajul ştiinţific (cu precădere cel matematic) am putea aminti:

- in legatura cu cele doua ipostaze fundamentale ale fiintei umane (rationala respectiv emotionala) vom avea in cadrul limbajelor amintite, printre punctele de plecare ale demersurilor, observatia rationala, respectiv emotia (fara ca aceasta sa constituie totusi o disjunctie exclusiva). Criticile consistente aduse opozitiei anterioare sunt numeroase, afirmandu-se ca aceasta deriva din confuzia ca se face intre limbajul si menirea artei.

- un fapt cvasiunanim acceptat este acela privitor la necesitatea ca limbajul matematic sa posede o sinonimie infinita, cu alte cuvinte, pentru fiecare fraza (matematica, in inteles uzual) sa existe o infinitate de fraze echivalente cu ea, prin fraze echivalente intelegandu-se fraze care au aceeasi semnificatie (aceasta fiind considerata in raport cu un anumit context). Limbajul artistic, se afirma, nu cunoaste sinonimia: o opera de mare valoare da impresia ca in ea nimic nu se poate modifica, nimic nu poate fi suprimat sau adaugat (L.B. Alberti)

- in contrast cu situatia anterioara, expresia artistica (neechivalabila) poarta o incarcatura semantica mai bogata, expresia ei caracterizandu-se, prin devenirea semantica in functie de cel ce o receptioneaza, in timp ce semnificatia expresiei stiintifice este independenta de acesta. Deschiderea limbajului artistic este vazuta ca o omonimie (infinita), iar limbajului stiintific i se asociaza o cvasiabsenta a omonimiei. Umberto Eco ("Opera aperta") distinge intre diverse grade de deschidere ale operei de arta: de la o ambiguitate propriu-zisa pana la opera scrisa in miscare ce lasa la latitudinea cititorului, in diferite momente, alegerea evolutiei ei ulterioare. Aceasta insa nu face imposibila , ci doar ingreuneaza, dupa cum afirma Umberto Eco, cercetarea stiintifica a operei.

Se poate continua aici (o analiza ampla din acest punct de vedere este facuta de S.Marcus in "Poetica Matematica", Ed. Academiei, Bucuresti, 1970) cu argumentari privitoare la raporturi de complementariere de tip: explicabil-inefabil (unele comentarii sunt incluse si in primele paragrafe ale prezentei lucrari), artificial-natural, traductibil-intraductibil, denotatie-conotatie (ce deriva din independenta de context a notiunilor matematice), etc. In chiar contextul anterior gasim si puncte de plecare pentru relevarea de analogii: itinerarul “observatie-ipoteza-testare” parcurs uneori in matematica este analog (Saint John Perse ”Discours de Stockholm”) celui dat de “emotie-creatie-exprimare” decelabil în procese artistice.

Opera matematica, precum si opera de arta, reprezinta articulari de descoperiri si inventii si au drept caracteristica unificatoare creativitatea. Un alt numitor comun este conceptul de simetrie ce leaga in mod evident matematica (in general stiinta) si arta (v. “Symmetry. Unifying Human Understanding” Istvan Harittai ed.Pergamon Press, New York, 1986). Acest concept conduce la o reordonare a obiectelor realitatii, ajungandu-se la aceea ca fenomene apartinand unor domenii foarte indepartate (de ex. cristale, grupuri, picturi de Escher) pot fi mai apropiate decat fenomene apartinand aceluiasi domeniu (de ex. grupuri, integrale).

Remarcam in final si un instrument comun matematicii si artei, anume metafora. Exemplificam prin notiunile matematice de sit, filtru, frontieră. Dar si aici se gaseste amprenta unei complementaritati esentiale: denotativ-conotativ. In timp ce metafora matematica are la baza o analogie intre doua semnificatii dintre care una apartine limbajului matematic si cealalta limbajului uzual, metafora (lingvistica, de exemplu) are la baza doar semnificatii din limbajul uzual. Insa amandoua au acelasi rol: acela de a colora, de a face mai sugestiva expresia, fie ea matematica, fie artistica.

5. In loc de incheiere

Vom cita cateva celebre cuvinte care exprima aceea parte a interferentei matematica /arta ce se cere promovata:

"*..the feeling of mathematical beauty, of harmony of numbers and forms, of geometric elegance. This is a true aesthetic feeling that all real mathematicians know.*" (Henri Poincare, "Mathematical creation", Scientif. American, 179, p.54-57, 1948).

"*The origin of painting is physical reality, and so is the origin of mathematics…but the painter is not a camera and the mathematician is not an engineer…In painting and in Mathematics there are some objective standards of good-the painter speaks of structure, line, shape and texture, where the mathematician speaks of truth, validity, novelty, generality-but they are realatively the easiest to satisfy. Both painters and mathematicians debate among themselves weather these objective standards should even be told to the young-the beginner may understand and overemphasize them and at the same time lose sight of the more important subjective standards of goodness. Mathematics is a creative art because mathematicians create beautiful new concepts; it is a creative art because mathematicians live, act and think like artists; and is a creative art because mathematicians regard it so.*"
(P.Halmos,"Mathematics is a creative art", American Scientist, n. 56, p. 375-389, 1968).

13. Matematica aplicata

Distinctia uzuala matematica pura – matematica aplicata poate fi apreciată drept o falsa distinctie. O argumentare a distincției nu neaparat in totalitate acceptabila, poate fi aceea legata de originea (motivația) rezultatelor matematice: aceasta poate fi externa (factori de natura tehnica, economica, sociala), sau interna (ce țin de demnitarea intelectului uman). Insa si în acest ultim caz, de obicei apar in timp nebanuite legaturi cu „practica". Oricum putem accepta distinctia: rezultatele matematice care premerg aplicatiilor şi rezultate matematice determinate de necesități practice. Aşa după cum spunea Profesorul Moisil, există rezultate de matematică aplicată şi rezultate de matematică ce nu s-au aplicat (încă).

Un exemplu este cel al sectiunilor conice: in anul 200 i.H geometrul grec Apollonius din Perga a scris „Tratatul asupra Sectiunilor Conice" ca un simplu exemplu de matematica pura. In anul 1604, deci 1800 de ani mai tarziu, Johannes Kepler, cunoscand scrierile lui Apollonius a aplicat rezultatele sale in optica si in studiul oglinzilor parabolice. In 1609 a precizat, utilizand proprietatile focale descrise de Apollonius, ca orbitele planetelor sunt eliptice si nu circulare.

Teoria matricelor initiata in 1860 a fost utilizata in 1925 in descrierea sistemelor atomice; calculul tensorial dezvoltat in anii 1870 a constituit un instrument de baza in teoria relativității a lui Einstein (1910).

Un alt rezultat surprinzator este legat de teorema de incompletitudine a lui K.Gödel (1931). Intr-o formulare simplificata aceasta spune ca toate formularile axiomatice lipsite de contradictii ale teoriei numerelor contin enunturi nedecidabile. Se transforma astfel intr-o himera visul lui Russell si Whithead anume de a crea cu ajutorul metodei aplicate in "Principia Matematica" un sistem lipsit de contradictii si complet. Teoria lui K.Gödel isi gaseste corespondentul in descoperirea logicianului englez Alan Turing, care a elaborat modelul unei masini ce poate simula orice computer. Nu poate insa sa se simuleze pe sine insasi. Lucrarea sa a fost publicata in 1936, cu zece ani inainte de construirea primului computer modern.

Ca o paranteza, amintim aici ca zguduirea pe care a provocat-o K.Gödel in lumea matematicii corespunde celei provocate de principiul indeterminarii al lui Heisenberg (simplificand, acesta spune ca in chiar cazul cunoasterii suficiente a conditiilor primordiale (spatiul si viteza fiecarei parti a Universului) din motive principiale si nu tehnice, nu se poate prezice integral mersul acestuia.

Alte cateva exemple ar putea fi:

- utilizarea geometriei lui Riemann in constituirea teoriei relativitatii;
- utilizarea algebrelor Lie în studiul particulelor elementare;
- aplicatiile teoremei de structura a grupurilor finite simple in teoria codurilor;
- aplicatiile analizei functionale, prin teoria bifurcatiei, in chimie, etc.

În general, se pot remarca unele direcții ce privesc aplicațiile concrete:

- calculul aproximativ, numeric (trecerea de la analiza clasică la echivalentul ei “discret”) dezvoltat în vederea obținerii soluțiilor aproximative pentru ecuații algebrice sau ecuații diferențiale, cu derivate parțiale sau integrale întâlnite în fizică, mecanică, etc.;
- manipularea “aleatorului” necesară în fizică, biologie, economie;
- optimizarea matematică (utilizarea resurselor, situații concurențiale, etc.);
- manipularea datelor (informaționale) anume gestionare, documentare automată, traducere automată şi chiar lingvistică, etc.

Dintr-o listă a capitolelor de matematică cu impact direct asupra concretului nu pot lipsi:

- funcțiile speciale;
- calculul operațional;
- algebra lineară, etc.

Se mai spune că în ceea ce priveşte unele aplicații ale matematicii există un paralelism cu situația când Cristofor Columb a plecat să găsească un drum către India şi ... a descoperit America.

Într-o încercate de argumentare, totuşi, a distincției amintite la început am putea remarca faptul că în cadrul matematicii găsim capitole de:

- matematici fundamentale (bazele matematicii, teorii algebrice, teorii topologice – în general cu caracter existențial);
- matematici abstracte (studiul structurilor algebrei, analizei, geometriei – cu singura intenție de a explora conținutul noțiunii considerate);
- matematica concretului (matematica aplicată, anume matematica aproximărilor, matematica aleatorului, etc. – amintite anterior);
- tehnicile matematice – de obicei asociate punctual aspectelor precizate mai sus, ale matematicii concretului;
- aplicații ale matematicii în fizică, automatică, lingvistică etc. – în sensul matematizării (limbaj, tehnici, etc.) acestor domenii.

În final menționăm şi impactul calculatoarelor în rezolvarea unor probleme matematice (aplicative sau nu).

Alături de statutul de instrument bibliografic, calculatoarele, dezvoltându-şi "performanțele intelectuale" îşi pot asuma şi rolul de "asistent de cercetare" (de exemplu în verificarea unor ipoteze pe un număr mare de cazuri, demonstrații, atunci când acestea implică un număr imens de calcule algoritmici etc.).

Mai mult, probabil că vor fi elaborați algoritmi de definire a unor concepte şi de mânuire a unor strategii de analiză a problemelor aşa încât calculatoarele vor putea elabora consecintele unui sistem de axiome dat, (aproape), altfel spus, vor putea "crea" matematică.

14. Matematica “elementară” – matematica “superioară”

Pentru a opera o distincție între matematica “elementară” şi matematica “superioară” este necesar înainte de toate un criteriu. Pot fi invocate: criteriul istoric (prin matematica elementară înțelegându-se acea parte a matematicii dezvoltată până la apariția calculului infinitezimal sau a geometriei analitice), criteriul psihologic (matematica ce este, printr-un mod oarecare, propedeutică fiind considerată elementară), etc. Se pot decela unele caracteristici ale matematicii “elementare” şi anume:

- valorizarea intuiției (de exemplu, în sporirea eficacității formative a geometriei);
- posibilitatea găsirii de modele suficient de simple; etc.

Amintim aici că un model matematic insuficient exploatat ete dat de “planul” $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ (mulțimea punctelor de coordonate întregi din planul euclidian) care pune în evidență atât proprietăți aritmetice şi geometrice simple cât şi proprietăți profunde de teoria numerelor sau privind aproximarea numerelor iraționale prin numere raționale, etc. (cu alte cuvinte un model posibil a fi invocat în diverse nivele ale matematicii).

Un punct important de referință îl constituie cartea “Matematica elementară dintr-un punct de vedere superior” publicată de F. Klein în 1908, unde noțiunile de matematică elementară sunt încadrate într-un context general (de exemplu, geometria euclidiană este inserată între diversele geometrii posibile conform "Programului de la Erlangen").

Această schimbare de perspectivă are în vedere şi faptul că, deja Freege, Dedekind, Peano subliniaseră semnificația fundațională a aşa numitelor concepte elementare punând în evidență dificultățile ascunse de aparentul caracter de banalitate al acestora. Pentru mult timp cele anterioare au influențat în mod decisiv didactica matematicii. O nouă schimbare în acest context a fost adusă de apariția vizunii bourbakiste asupra matematicii, limbajul fiabil şi clar, căutarea metodelor generale fiind caracteristici ale acestui mod de abordare globală a matematicii. Punctul central este constituit de noțiunea de structură (suprapusă structurilor elementare de ordine, algebrice sau topologice) ce conferă unitate matematicii şi face să dispară distincția matematică elementară – matematică superioară. Numai că acest criteriu de complexitate structurală util, evident, în vederea unei clasificări în interiorul matematicii nu este funcțional şi în cadrul didacticii matematicii.

Se acceptă că unul dintre obiectivele finale ale educatiei matematice este acela ca elevii să stăpânească structurile matematice şi să le utilizeze în situații concrete dar acest lucru nu se poate face deductiv (eclectic) ci inductiv.

Dezvoltările actuale ale matematicii şi logicii au, de asemenea, un impact major în didactică anume au dus la accentuarea aspectelor euristice, originale.

Este interesant de remarcat influențele pe care le au, în timp, cercetările avansate de matematică asupra matematicii elementare. Mai mult, anumite teme "sine qua non" ale matematicii elementare ce nu au putut fi motivate mulțumitor la nivel elementar şi-au deschis apoi, progresiv, "armura" către matematica şcolară.

Noțiunea fundamentală de arie, de exemplu, a evoluat în funcție de cercetările asupra congruențelor, invarianțelor, etc. (teorema lui Haar asupra existenței unei măsuri invariante pe un grup local compact lămurind definitiv problema). La nivel elementar se revine apoi la invarianța ariei relativă la translații.

Sunt şi cazuri în care pentru noțiuni ce pot fi prezentate la nivel intuitiv (curbă simplă continuă) se constată că o abordare din punctul de vedere al unei teorii deductive este impracticabilă.

Transferul şi interrelaționările dintre matematica superioară şi matematica elementară şi evoluția matematicii actuale impun şi acordarea unei mai mari atenții aspectelor constructive (şi algoritmice), fără a diminua însă aspectul "cantorian". Aceasta presupune şi achiziționarea de instrumente, anume aducerea în cadrul matematicii elementare a unor rezultate din teoria grafurilor, din teoria probabilităților, etc.

Mai mult, se impune comentariul, reflecția în rezolvarea problemelor, în prezentarea noțiunilor şi rezultatelor. Şi toate acestea cu consecințe deloc neglijabile asupra didacticii matematice.

Încheiem cu un exemplu: clasicul "modus ponens"

$p \Rightarrow q$	(admitem că $p \Rightarrow q$)
p	(admitem că are loc p)
q	(atunci urmează q)

Pentru un plus de plasticitate, ieşind din sfera matematicii, considerăm că p = “focul e aprins”, q = “iese fum”. Deci, “dacă focul este aprins, atunci iese fum” şi “focul este aprins” urmează că “iese fum”.

Dar dacă “iese fum” nu putem afirma în mod cert că “focul este aprins”.

O formulare potrivită ar fi “dacă iese fum probabil că focul este aprins”. Mai mult reformulând putem spune că $P(p/q) > P(p)$ adică probabilitaea lui p condiționată de q este mai mare decât probabilitatea lui p.

Mai putem considera, în contextul anterior, p = “matematica evoluează”, q = “ didactica matematicii se transformă”.

Bibliografie

[1] O. Becker: “Măreția şi limitele gândirii matematice”, Ed. Ştiințifică, 1968

[2] N. Bourbaki: “Theorie des ensembles”, Hermann, Paris, 1963

[3] A. Dimitriu: “Mecanismul logic al matematicilor”, Ed. Academiei, Bucureşti, 1982

[4] F. Eugeni, D. Tofan, I. Tofan: L’ineffabile nella matematica ed il rigore nel’arte, Conv. “Arte e Matematica”, Vasto, 2003

[5] P.Fletcher, C.Wayne Patty: ”Foundations of higher mathematics.” PWS Kent Publ.Comp Boston, 1961

[6] G. Glaeser: ”Mathematiques pour l’eleve professeur” Hermann, Paris 1971

[7] F. Gonseth: “Les fondements de la mathematique”, Paris, 1926

[8] J. Hadamard: “Essai sur la psychologie de l’invention dans la domaine mathematique”, Blanchard, Paris, 1959

[9] St. Korner: “Introducere în filosofia matematicii”, Ed. Ştiințifică, Bucureşti, 1965

[10] S.Marcus: “Arta si Stiinta”, Ed. Eminescu, 1986

[11] A. Maturo, D. Tofan, I. Tofan: Infinito – che cosa vuol dire ? Conv. “Arte e Matematica”, Vasto, 2003

[12] A. Maturo, D. Tofan, I. Tofan: Filosofia e Matematica, Conv. “Arte e Matematica”, Vasto, 2003

[13] J. R. Newmann: “The world of Mathematics”, New York, Simon and Schuster, 1956

[14] H. Poincare: “Stiinta si metoda “, Ed. Şt. şi Encicl., Bucureşti, 1986
[15] G. Polya: “Cum rezolvam o problema”, Ed. Şt. Bucureşti, 1965
[16] N. Presmeg: “A semiotic framework for linking cultural practice and classroom mathematics”, Annual meeting – Psychology of Math. Ed., Blomington, 1997
[17] J. Singh: “Great Ideas of Modern Mathematics”, Dover Publ., New York, 1959
[18] C. Winslow: “Semiotics as an analytic tool for the didactics of mathematics” – paper on line.
[19] *** vol I ,II III Mathematics (People, Problems, Results) (Lucrarile publicate de: Francois Le Lionnais, R. L. Wilder, E. Bishop A. Adler, M. Kline, P. R Halmos, E. Borel, E. Snapper)
[20] ***Atti dei convegni: “Matematica e cultura” (L’Aquila, 1998)
[21] “Cento anni di matematica” (Roma 1995),”
[22] “I Fondamenti della matematica per la sua didattica”, Verona, 1996

(Foarte) scurtă istorie

1. Preistorie. Se cunoaşte că în civilizațiile antice (Egipt, Mesopotamia, India, China) s-a dezvoltat doar o matematică practică, concretă – necesară în problemele de numărare sau de măsurare (arii, lungimi, volume). S-au născut concepțiile de număr natural concret (2 prune, 3 elefanți, etc.) şi de fracție. În acest context este probabil că a fost considerat doar cazul obiectelor fizice. În acelaşi timp se impune să amintim că în Mesopotamia a fost utilizată baza de numerație 60 (utilă în calcule astronomice şi geografice), iar "aşa numitele" cifre arabe au fost propuse de indieni, adoptate de arabi şi apoi transmise de către aceştia popoarelor europene.

Rămâne însă, cel puțin o întrebare: Cum a fost posibil ca atâtea numere faimoase (π, numărul de aur, etc.) să se regăsească în dimensiunile piramidei lui Keops.

Între sursele directe de informare pentru această perioadă amintim: papirusul de la Kahun (1900 – 1800 î. H); - papirusul (de la Muzeul) din Berlin (1900 – 1800 î. H.); - papirusul Rhind (~ 1700 î. H.); etc.

2. Matematica greacă. Perioada elenistică. În secolele VI î. H. – IV d. H. în contextul unei dezvoltări explozive a gândirii umane şi a libertății individuale s-a ivit adevărata Matematică (în vechea Eladă – alături de filosofie, de fizică, etc.).

În această perioadă au fost introduse conceptele de: demonstrație, definiție, ipoteză, deducție, inducție, etc., au început cercetările teoretice bazate nu numai pe observații dar şi pe raționamente şi, în acelaşi timp, au apărut tendințele de organizare a cunoştințelor (anume se constituie teoriile ştiințifice şi metoda axiomatică).

Amintim de: - Thales (Milet, 640 – 540 î. H.); - Hyppocrate (Chios, 470 – 400 î. H.); - Pitagora (Samos, 581 – 497, î. H.); - Zenon (Elea, 490 – 430 î. H.); - Eudoxus (Cnid, 408 – 355 î. H.); - Euclid (? 365 - ? î. H.); - Archimede (Syracuza, 287 – 212 î. H.); - Eratostene (Cyrene, 275 – 194 î. H.); - Apollonius (Perga, 262 – 180 î. H.); - Menelaos (Alexandria, ?); Diofant (Alexandria, ?325 - ?409); - Pappus (Alexandria, ?), etc.

Contribuții de excepție în sau despre matematică au adus şi filosofii Socrate, Platon, Aristotel.

Dintre cărțile acestei perioade amintim: Elemente (Euclid); Cărțile de geometrie (Arhimede); Konikon biblia (Apollonius); Le sferiche (Menelaos); Arithmetike eisagoge (Nichomachus); Sinagogi matematiki (Pappus); Aritmetica (Diofant); etc.

În acelaşi timp, în China şi India apar "Țin cijan suan şu" (9 cărți de matematică) şi respectiv "Aryabhatta" (ce contine consistente elemente de matematică).

Între rezultatele obținute de matematica greacă (în perioada elenistică) remarcăm: apariția conceptelor abstracte (număr, dreaptă, curbă, paralelism, etc.), dezvoltarea teoriei numerelor (teoria divizibilității, număr prim, c.m.m.d.c., c.m.m.m.c., etc.) , dezvoltarea logicii, rezultate relative la ecuațiile cu numere întregi, teoria asemănării, rezultate asupra conicelor, relații metrice, atâtea alte rezultate de geometrie sintetică plană sau în spațiu, etc. Se poate accepta că perechea număr real – segment a constituit entitatea fundamentală pentru matematica acelei perioade.

Amintim ca un alt rezultat important şi cu implicații deosebite (nu numai în matematică) – descoperirea numerelor iraționale.

3. Evul Mediu. Lumea europeană este săracă în rezultate matematice semnificative (totuşi trebuie să remarcăm contribuțiile lui Fibonacci (Pisa, 1170 - 1205)). Au circulat diverse traduceri ale operelor elenice sau arabe şi (fapt important pentru viitor) apar primele instituții de învățământ superior Universitatea din Bologna (1088), Universitatea din Salerno (1150), Universitatea din Oxford (1168), etc.

În acelaşi timp, prin comparație, se poate aprecia că în lumea islamică şi în India se remarcă o anume efervescență spirituală: sunt studiate diverse ecuații, sunt introduse numerele negative, etc.

Matematicienii arabi au studiat numerele raționale, ecuațiile polinomiale, etc. construind paşi importanți pentru un nou capitol al matematicii algebra (al - jabr). În cadrul geometriei şi trigonometriei se remarcă cercetările privind construcțiile cu rigla şi compasul, axioma paralelelor, numărul π (calculat cu 17 zecimale exacte); funcțiile trigonometrice.

Amintim de Al – Horezmi (Al - Khwarismi) (780 – 850); Omar Khayam (1048 - 1123); Al – Battani (850 - 929) – funcțiile trigonometrice; Al – Tusi (1201 - 1274) – comentarii asupra geometriei euclidiene, etc.

4. Matematica Renaşterii (secolele XIII - XVI). Renaşterea reprezintă o perioadă de sistematizare, de reorganizare a matematici. În acelaşi timp sunt obținute rezultate importante în domeniul ecuațiilor algebrice (Nicolo Fontana (Tartaglia), (1500 - 1557); Gerolamo Cardano (1501 - 1576); Lodovico Ferrari (1522 - 1576), François Viette (1540 - 1603)) sau în domeniul geometriei (dezvoltarea geometriei proiective – A. Durer (1471 - 1528)). Dintre cărțile acelei perioade amintim: - Summa di Aritmetica, Geometria, proportioni et proportionalita (Luca Paccioli - 1487); - Unterweisung derr Messung (A. Durer - 1525); - Practica Arithmeticae (G. Cardano - 1539); - Ars magna sive de regulis Algebraices liber unus (G. Cardano - 1545); - Algebra (Rafaelo Bonselli - 1572); - Canon Mathematicus (F. Viette – 1579); - Problematum geometricum (S. Stevin - 1583); - Arithmetique (S. Stevin - 1582); - In artem analyticem isagoge (F. Viette - 1591).

5. Perioada modernă (secolele XVII - XIX). La începutul acestei perioade matematica era constituită de: Aritmetică şi Teoria Numerelor, Algebră, Geometrie şi Trigonometrie. Urmează o dezvoltare similară ca amploare celei din perioada elenistică. Vom prezenta caracteristicile generale ale acestui proces.

Alături de dezvoltarea capitolelor amintite anterior apar noi capitole de matematică: teoria probabilităților, mecanica teoretică, calculul diferențial şi integral, teoria ecuațiilor diferențiale, calculul variațional, analiza complexă, geometria diferențială, topologia, etc. A început studiul fundamentelor matematice (teoria mulțimilor, dezvoltarea logicii) şi al infinitului.

Un fapt având un impact de aceeaşi amploare cu cel generat de descoperirea numerelor iraționale, este constituit de inventarea metodei coordonatelor (R. Descartes, 1596 - 1650) şi, în consecință apariția geometriei analitice. În acest mod în perechea număr real – segment creşte rolul numărului ce va deveni conceptul fundamental al matematicii (aritmetizarea matematicii).

Alături de "metoda coordonatelor" trebuie să menționăm rezultatele excepționale relative la ecuațiile algebrice (teorema lui D'Alembert, teoria lui Galois), apariția geometriilor neeuclidiene (redescoperirea metodei axiomatice), atâtea alte rezultate privind numerele prime, etc. În plus, apare distincția studiu global – studiu local, se operează diverse sistematizări, se dezvoltă limbajul matematic. Simultan cu apariția teoriei mulțimilor cuplul element – mulțime îşi revendică rolul fundamental în matematică.

Între noțiunile dezvoltate în acestă perioadă remarcăm: logaritm, şir, serie, convergență, funcție, derivată, integrală, probabilitate, proiectivitate, determinant, matrice, număr complex, ecuație diferențială, ecuație cu derivate parțiale, ecuație integrală, grup (şi alte structuri algebrice), spațiu metric (şi alte structuri geometrice), izomorfism, invarianță, spațiu topologic, etc. (şi evident noțiuni derivate din cele anterioare).

Se poate aprecia şi că dezvoltarea matematicii a fost determinată, în principal, de necesitatea studierii unor fenomene din natură.

Totuşi încep şi studiile care au (cel puţin) ca punct de pornire "demnitatea intelectului uman" (sintagmă datorată lui D. Hilbert).

Nu pot fi uitate cercetările lui Blaise Pascal pentru realizarea unei maşini care să fie folosită în activitatea intelectuală a omului (alături de atâtea instrumente ce servesc muncii manuale, fizice). O imagine a evoluţiei matematicii în perioada modernă poate fi obţinută printr-o enumerare (sumară) a matematicienilor acestei perioade: John Napier (1550 - 1617) (inventatorul logaritmilor); Rene Descartes (1595 - 1658) (metoda coordonatelor); Francesco Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) (precursor al calculului intergral); Pierre de Fermat (1601 - 1665) (teria numerelor); Isaac Newton (1642 - 1727) (unul dintre inventatorii calculului diferenţial şi integral); Gottfried Wilhalm Leibnitz (1647 - 1714) (calculul diferenţial şi integral); Jakob (Jacques) Bernoulli (1654 - 1705) (calculul variaţional, teoria probabilităţilor); Johann (Jean) Bernoulli (1667 – 1748) (ecuaţii diferenţiale); Leonard Euler (1707 - 1783) (teoria numerelor, calcul diferenţial şi integral, ecuaţii diferenţiale, teoria funcţiilor, algebră); Joseph – Louis Lagrange (1736 - 1813) (ecuaţii cu derivate parţiale, calcul variaţional); Gaspard Monge (1746 - 1818) (geometrie descriptivă, geometrie diferenţială); Pierre – Simon de Laplace (1749 - 1827) (mecanică, teoria probabilităţilor, teoria determinanţilor); Adrien – Marie Legendre (1752 - 1833) (analiză matematică, teoria numerelor); Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) (serii de funcții, ecuațiile fizicii matematice); Carl Friederich Gauss (1757 - 1855) (teoria numerelor, algebră, analiză matematică, geometrie diferențială); Augustin – Louis Cauchy (1789 - 1857) (analiză matematică, teoria funcțiilor, ecuații diferențiale, fizica matematică); Nicolas Ivanovici Lobacevscki (1792 - 1856) (geometrii neeuclidiene); Niels Henrik Abel (1802 - 1820) (analiză complexă, algebră); Janos Bolyai (1802 - 1860) (geometrii neeuclidiene); Peter Gustave Dirichlet (1805 - 1859) (teoria analitică a numerelor); Evariste Galois (1811 - 1864) (ecuații algebrice); George Boole (1815 - 1864) (logica matematică); Karl Weierstrass (1815 - 1897) (funcții complexe); Leopold Kronecker (1823 – 1871) (teoria numerelor, algebră); Georg Friederich Bernhard Riemann (1826 – 1866) (teoria numerelor, analiză complexă, geometrie); Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 - 1916) (teoria numerelor, analiză matematică, algebră); Marius Sophus Lie (1842 - 1899) (geometrie diferențială); Jean Gaston Darboux (1841 - 1917) (geometrie diferențială, analiză matematică); Georg Cantor (1845 - 1918) (teoria mulțimilor); Felix Cristian Klein (1849 - 1925) (algebră, geometrie, teoria funcțiilor); Henri Jules Poincare (1854 - 1912) (analiză matematică, mecanică, ecuații diferențiale, topologie algebrică).

6. Perioada contemporană (secolul XX). Vom continua cu o scurtă enumerare a matematicienilor (născuți înainte de 1900) ce au lucrat în prima parte a secolului XX: David Hilbert (1862 - 1930) (teoria invarianților, ecuații diferențiale şi integrale, câmpuri de numere algebrice, fundamentele matematicii); Felix Haussdorff (1868 - 1942) (topologie, teoria mulțimilor); Elie Joseph Cartan (1869 - 1951) (geometrie diferențială); Bertrand Arthur Wiliam Russel (1872 - 1951) (fundamentele matematicii); Jan Lukasiewicz (1878 - 1956) (logica); Luitzen Egbert Jan Brouwer (fundamentele matematicii); Emmy Amalie Noether (1882 - 1935) (algebra); Herman Weyl (1885 - 1955) (ecuații integrale, geometrie, teoria grupurilor, fundamentele matematicii); Isaak Paul Bernayss (1888 - 1977) (fundamentele matematicii) şi atâția, atâția alții !

Drept caracteristici generale remarcăm: • tendințele de sistematizare, de organizare a matematicii (ce devine un sistem de teorii matematice asupra unor structuri: numerice, ale teoriei mulțimilor, topologice, algebrice, geometrice, analitice, probabilistice); • dezvoltarea structurilor mixte topologico – algebrice etc. (altfel spus o tendință de unificare); • în acelaşi context (al unificării) amintim existența unui limbaj comun, a unei simbolistici proprii şi a unor metodologii specifice (metodele axiomatice, deductive); • la nivel concret menționăm apariția teoriei categoriilor (S. Eilenberg, S. Mac Lane, 1945); • se disting: matematica globală (alături de matematica proprietăților locale), matematica discretului (alături de matematica continuului), matematica aleatorului, etc.; • utilizarea calculatoarelor (în demonstrații – teorema celor patru culori, sau în modelare – sisteme mari, etc.); • apariția programelor de dezvoltare a matematicii

(Programul de la Erlangen, Problemele Hilbert, etc.). Cuplul de numere {0, 1} se instituie drept entitate fundamentală a matematicii. Continuă stadiul fundamentelor matematicii (teoria mulțimilor, logicismul, intuiționismul, formalismul).

Nu este posibilă aici enumerarea rezultatelor obținute în acestă perioadă (relative la sistemele axiomatice pentru teoria mulțimilor, fundamentele matematicii, teoria analitică a numerelor, teoria geometrică a numerelor, topologie, topologie algebrică, teoria măsurii, teoria grupurilor finite, algebra omologică, mulțimi analitice, teoria operatorilor, teoria distribuțiilor, topologia diferențială, geometria algebrică, etc., etc.). Şi este plauzibilă expansiunea continuă a matematicii spre găsirea de metode noi de studiere inclusiv a unor aspecte ce țin de cultura umanistă, de fenomenele esențial emoționale, etc. cu scopul de a decela arhitectura, imaginea simbolică completă a universului (ce ne găzduieşte).

Bibliografie

I. D. Papuc, Universul matematic al civilizației umane, Ed. Marineasa, Timişoara, 2003.

Conceptul de număr la Platon

1. Preambul. Este îndeobşte acceptat faptul că în abordarea unui concept trebuie ținut cont de faptul că acesta constă din "intensiune", adică din descrierea (specificarea) sa şi din "extensiune", aceasta însemnând mulțimea obiectelor descrise. Evident descrierea se face prin proprietăți (atribute) specifice (în sensul determinării clare a extensiunii).

Formalizând putem spune că definirea unui concept se face în contextul precizării – unui univers al obiectelor posibile (O); - unui obiect al proprietăților posibile (P); - unui înțeles pentru relația (între O şi P) "a avea o anume proprietate", şi, apoi, a unor corespondențe o: $\mathcal{P}(O) \to \mathcal{P}(P)$, p: $\mathcal{P}(P) \to \mathcal{P}(O)$, unde pentru $A \subseteq O$, o(A) = ={proprietățile obiectelor din A}, iar pentru $B \subseteq P$, p(B) = {obiectele ce au toate proprietățile din B}.

Astfel, prin concept se poate înțelege un cuplu (A, B), pentru care o(A) = B, p(B) = A. Formalizarea anterioară deschide calea unei abordări matematice a problemelor conceptelor [B. Ganter, R. Wille, Formal Concept Analysis, Springer – Verlag, 1999].

Interesante pot fi cazurile speiale de cupluri de funcții (o, p) cum ar fi cel al conexiunilor de tip Galois, precum şi situațiile când "universurile" O şi P sunt structurate în diverse moduri.

Invocarea unri atare abordări nu este total adecvată studiului conceptelor platoniciene (totuşi în cele ce urmează nu va fi în întregime ignorată), schematizarea provocându-le o pierdere de substanță, de consistență (şi, de ce nu, de savoare).

Este necesar să avem în vedere contextul istoric, opiniile lui Platon despre ceea ce înseamnă definiție şi, în general concepția platoniciană asupra cunoaşterii.

Este important să amintim aici influențele formative pe care le-au avut asupra "elevului" Platon, profesorii săi Socrates şi Theodorus din Cyrene. Socrates, autor al "maieuticei" (arta ajungerii la adevăr printr-o gândire corectă) a fost preocupat de formarea şi natura conceptelor generale, de rigoarea proceselor de gândire [A. Labriola; La dottrina di Socrate secondo Senofonte, Platone, Aristotele; Napoli, 1871, (retipărită, Milano, 1961)].

În ceea ce priveşte definițiile, Platon transformă căutarea definiției (având drept scop înțelegerea naturii lucrului despre care vorbim) a lui Socrate într-o cerință ontologică în care adevăratul înțeles al termenilor se dobândeşte prin referința la un obiect sau Formă (eidos) transcendentă.

Ne vom mai referi în continuare şi la teoria platoniciană a cunoaşterii (ce înglobează atât pe cea a lui Parmenide cât şi pe cea heracleitică), fără prezentarea viziunii epistemologice şi metafice a lui Platon şi la excepționalele rezultate matematice ale Şcolii lui Pitagora, rezultate cunoscute de Platon şi care au amprentat concepția sa asupra numărului. Aceasta nu înainte de a face o scurtă prezentare a epocii în care a trăit Platon.

În ceea ce priveşte imensa literatură relativă la Platon ne vom mărgini să precizăm că la conceptul de număr, în mod special, în afara lucrărilor generale se referă următoarele: [L. Robin, La theorie platonicienne des Idées et des Numbers, paris, 1908]; [J. Stenjel, Zahund Gestalt sei Platon und Aristoteles, 1924, (ediția a II-a)]. Evident nu pot fi neglijate mărturiile lui Aristotel legate de Platon presărate în a sa Metafisica.

2. Contextul istoric. Evoluția lentă (pe toate planurile) a civilizațiilor antice a fost întreruptă brusc de schimbări rapide (în sec. VI a. D. – IV d.D) petrecute în spațiul Greciei antice (Greciei mari rezultate prin înființarea de "polisuri" în insule şi aproape pe întregul țărm al Mediteranei).

Ştiințele şi filosofia, în înțelesul modern al cuvântului, au apărut atunci în Grecia antică, cu realizări semnificative, uluitoare.

În general vorbind, în Grecia antică cunoaşterea începe să se bazeze în mod esențial pe reflecție, pe raționament; apare tendința de a ordona, clasifica cunoştințele (organiza teoriile ştiințifice) şi, mai mult, gândirea umană începe să se autocerceteze.

Rezultalele din domeniul filosofiei şi matematicii dovedesc o excepțională putere de pătrundere a proceselor de gândire, o înțelegere a lumii, a cosmosului ce merge mult dincolo de aparența nemijlocită a faptelor observabile.

Dintre şcolile filosofice ale acestei perioade menționăm: Şcoala Ioniană (Thales din Milet); Şcoala Eleată (din Sudul Italiei); Şcoala lui Pitagora (din Crotona); Şcoala atomistă (Democrit);

Academia lui Platon (din Atena); Gimnaziul lui Aristotel, Şcoala din Syracusa (Arhimede); Şcoala din Alexandria (Euclid, Ptolemaios).

Atunci s-a născut ca ştiință ipotetico- deductivă, matematica, au apărut conceptele de demonstrație, de axiomă, de ipoteză etc. s-a dezvoltat un sistem de reflecții de natură filosofică asupra Universului matematic, asupra naturii adevărurilor matematice, asupra Infinitului.

O explicație plauzibilă [D. I. Papuc, Universul matematic al civilizației umane, Ed. Marineasa, Timişoara, 2003; W. Fleming, Arts and Ideas, Holt, Rinehard and Winstone Inc. 1974] la acest miracol o poate constitui libertatea de gândire, libertatea umană din societatea greacă a antichității, prețuirea de care se bucurau învățații, conştientizarea unui ideal ce poate fi sintetizat în cuvintele "adevăr şi frumos" precum şi, după cum afirmă Homer [Homer, Iliada VI], o dorință efectivă a fiecărui cetățean de "a fi cel mai bun şi mereu deasupra altora", şi , de ce nu, o anumită iscusință presupusă şi de meseriile pe care ei, grecii, în majoritatea lor, le profesau: comerțul şi mărinăria.

În elaborarea matematicii perioadei eleniste s-a pornit de la materialul faptic constituit de cunoştințele utilitariste ale predecesorilor şi ale altor civilizații antice (egipteni, babilonieni etc.). Însă, după cum spunea Platon, "Tot ceea ce noi grecii am primit, noi am îmbogățit, am perfecționat" (cf. [F. Cajori, A. History of Mathematics, Chelsea Publ. Comp. N. Y. 1893 (retipărită, ediția a V-a, 1991)]).

Se disting două etape: - perioada clasică elenă (sec. VI – IV a. D.), când, în mod esențial, s-a produs acumularea de rezultate matematice remarcabile, dar disparate (cu unele excepții cum ar fi Teoria numerelor raționale a lui Eudoxus); şi – perioada numită elenistică (sec IV a. D – IV p.D.), când se produce o sistematizare a cunoştințelor, evidențierea de relații logice între diferite structuri matematice şi este aprofundat studiul metodelor matematicii.

Amintim doar câteva nume, în ordine cronologică: Thales, Pitagora, Zenon, Socrate, Platon, Aristotel, Euclid, Arhimede, Appolonius, Menelaos, Ptolemaios, Diphantes, Pappos.

Câteva precizări speciale despre Pitagora şi Şcoala sa din Crotona se impun: Studiul operațiilor cu numerele naturale a condus la crearea fundamentelor teoriei divizibilității, a numerelor prime, a numerelor raționale. Rezultate interesante sunt obținute şi în teoria rapoartelor şi proporțiilor (ca egalități de rapoarte). În domeniul rapoartelor s-au stabilit, între două măsuri, a, b începând cu raportul aritmetic a/b, 10 tipuri de rapoarte posibile: raportul compus (a+b)/b, cel convertit a/(a+b), etc. Pitagoreicii din Sicilia stabiliseră trei tipuri de proporții: aritmetică (b – a = d - c), geometrică (a/b = c/d), armonică (1/b – 1/a = 1/d – 1/c). Corespunzător se obțin mediile aritmetică, geometrică, armonică. Eudoxius, discipol apropiat al lui Platon a ridicat numărul acestora la 6, iar neopitagoricienii Myonides şi Euphanor (sec. I a. D) au mai găsit patru, ajungând la un total de 10 (egal cu numarul rapoartelor posibile). Ultima ((c-a)(c -b) = b/a) sub aparența sa discretă ascunde principiul formării şrului Fibonacci.

Amintim şi că, după cum arată Vitruviu, numele proporției geometrice în greceşte este $\alpha\nu\alpha\lambda\gamma\iota\alpha$-analogia şi că aceasta domină artele vizuale în special arhitectura, aşa după cum proporția armonică apare în muzică. Cercetările din muzică, geometrie, astronomie, alături de cele de aritmetică i-au dus pe pitagoricieni la proclamarea supremației numărului: "Totul este rânduit după număr". Principiul analogiei, formulat de Pitagora "Vei cunoaşte atât cât este cu putință pentru un muritor, că Natura este în totul asemănătoare sieşi" şi amintit de Platon în Scrisoarea a VII-a se adaugă astfel celui deja enunțat. Ecoul acestui Principiu al analogiei este reflectat de-a lungul dezvoltării ştiinței, filosofiei, răsună încă în "Pădurea simbolurilor" a lui Baudelaire sau în "Demonul analogiei" de Mallarmé.

Un rezultat imprevizibil şi şocant a fost descoperirea segmentelor incomensurabile, adică a numerlor iraționale. Se ajunge astfel la mulțimea numerelor ce sunt lungimi de segmente de dreaptă, măsurate cu un segment unitate fixat, anume mulțimerea numerelor reale pozitive. Definiția anterioară, de exemplu, a fost utilizată şi a rămas aceeaşi în următorii 2500 ani (până în secolul XIX).

Pitagoreismul gândea lumea ca număr, aceasta reprezentând cheia înțelegerii a numeroase aspecte disparate ale lumii. Deosebit de important este şi faptul că esența lucrurilor a fost înțeleasă ca fiind determinată nu de materialul din care sunt făcute, ci de structura lor. Aceasta, împreună cu atâtea altele au condus la ceea ce spunea filosoful şi matematicianul B. Russel, "Cel mai uluitor lucru în ştiința modernă este întorcerea sa la pitagorism".

Pitagora este şi un creator de filosofie (chiar cuvântul "filosofie" i se datorează), de doctrină etică, doctrină religioasă (a se vedea corespondența simbolică dintre inscripția de pe o plăcuță funerară de la Iharium, notată de Carcopino şi stucaturile Bazilicii pitagoreice de la Porte Maggiore din Roma precum şi "Casa pentru Filosofie" organizată de Samos, inspiratoare a mitului peşterii al lui Platon).

3. Platon şi matematica. În [M. Ghyka, Le nombre d'or. Rites et rythmes pitagiriciens dans le développement de la civilization occidentale, Paris, Galimard, 1963] se deduce pe baza dialogurilor Timaios, Philebos, Theaietos şi a Scrisorii a VII-a o nouă confirmare a faptului (cunoscut de pe vremea lui Cicero) că Platon a avut cunoştințe de matematică pitagoreică în profunzimea ei, preocupându-se apoi de teoria proporțiilor, de studiul solidelor numite astăzi solide platonice.

Poate studiind matematica Platon aunge la surptinzătoarea sa filosofie a celor două lumi. Afirmă Platon: există realități universale, permanente, inteligibile ca separate de ceea ce este individual, schimbător sensibil. Aceste realități sunt Ideile sau Formele.

Există aşadar o lume principală – lumea Ideilor în care Ideile sunt eterne, imuabile, principii ale tuturor lucrurilor care există şi principii ale cunoaşterii. Lucrurile, întreaga realitate sensibilă nu reprezintă decât o umbră a acestei lumi a ideilor (după cum este sugestiv explicat în mitul peşterii). Lumea sensibilă este secundară din punct de vedere ontologic, este o lume a implementărilor (imperfecte, chiar imprecise) ale Ideilor. Sufletul omului a trăit, spune Platon, în lumea Ideilor însă din cauza căderii din această lume celesă, din cauza înlănțuirii lui în lumea umbrelor sensibile el a uitat-o. Prin urmare, "a cunoaşte" nu este altceva decât "a-ți reaminti" (acesta este faimoasa teorie a reminescenței, prezentată în dialogul Menon). Acestă Teorie a Formelor se conturează ca temei al oricărei cunoaşteri (episteme) în întelesul deplin al acesteia, din căutarea de definiții ale unor standarde universale, imnabile, eterne, permanente. În legătura cu obiectele şi proprietățile lumii sensibile putem spune că modul în care ne apar depinde de punctul de vedere, de subictivism şi de faptul că lumea sensibilă este una a devenirii. Se recunosc astfel atât viziunea lui Parmenode cât şi cea heracleitică.

În cunoaştere Platon cunoaşte două grade: opinia (în legătură cu lumea sensibilă), datorată simțurilor şi ştiința, datorată inteligenței. Opinia se poate raporta la două moduri de cunoaştere, credința şi conjectura, iar ştiința la cunoaşterea rațională (dianotică) şi intuiția intelectuală (noesis).

Obiectivele matematicii (inclusiv numerele) se găsesc, la Platon (conform lui Aristotel, Metaph A, 6, 987b, 991b, 995b) în spațiul intermediar dintre lumea Ideilor şi cea a realității sensibile. Ele sunt imobile şi eterne precum Ideile, însă în timp ce orice Idee are propria sa individualitate, obiectele matematicii au doar unitatea specifică şi comportă (precum în lumea sensibilă) o infinitate de exemplare asemănătoare. În lumea Ideilor se vor găsi însă numerele reale şi figurile ideale. Acestă strictă scară, putem spune că este caracteristică domeniului matematicii. Aristotel critică (Metaph B, 9) acestă poziționare platoniciană a obiectelor matematicii şi, mai mult, este adversar şi al variantei în care obiectele respective nu sunt considerate intermediare ci ca alcătuind o lume distinctă (varianta lumii distincte poate fi susținută în contextul operei lui Platon ca spațiu intermediar, al intervalului – spațiu întru-câtva de sine stătător). Aristotel a fost promotorul ideii că obiectele matematicii reprezintă abstractizări, idealizări ale omului, plecând de la lumea sensibilă. Acestă ipoteză nu este verificată însă în totalitate (exemplificăm prin geometriile neeuclidiene). În schimb putem interpreta abstractizarea drept o cale de a impulsiona reamintirea în legătură cu teoria reminiscenței amintită anterior.

Putem emite şi ipateza, în legătură cu poziția intermediară a conceptelor matematicii, că acestea se constituie într-un drum (o cale) între lumea sensibilă şi lumea Ideilor.

De-a lungul istoriei matematicii se revine adeseori la statutul obiectelor matematicii. Chiar în contemporaneitate găsim aserțiunea "Matematica este acea parte a Planului Divin pe care noi putem să o înțelegem" [C. Foiaş, Is Mathematics a human creation ?, Timişoara, 1999]. Este aceasta şi o lectură din punct de vedere inedit, a dictonului pitagorician "Totul este rânduit după număr".

4. Numărul. În opera lui Platon, numeroase sunt referințele fie direct la numere, fie la conceptul de număr. Problema incomensurabilității unor segmente (altfel sus iraționalitatea unor numere) l-a preocupat pe Platon, interesul său vădindu-se în Menon 83b, Republica VII, 546 b, c, Theaitetos 147 d, Timeos 32 b.

O atenție specială este acordată de Platon teoriei proporțiilor şi mediilor, ideea de medietate $\left(\frac{(a+b)}{2}, \sqrt{ab} \text{ etc.}\right)$ fiind prezentă în definiția dată proporției în Timeos: "dar e cu neputință să combini cum trebuie două lucruri fără un al treilea: trebuie între ele o legătură care să le unească". Preocupările din şcoala sa (în special Eudoxiu) au condus la introducerea a trei noi tipuri de proporții.

Pentru Platon "problema armonică generală" constă în a intercala medietatea necesară pentru a lega două mărimi, două intervale muzicale, două entități logice, pentru a realiza o consonanță. Luca Paccioli este cel care a pus în lumină frumusețea rezultatelor lui Platon reletive la proporții şi corpuri perfecte.

În Timeos, Platon stabileşte un rebus (dezlegat abia la începutul secolului XIX) pentru calcularea aşa numitului "Numărul Sufletului Lumii", de fapt o gamă cu 35 note $1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{27}{6}, \frac{243}{128}, 2, \ldots,$ 27, unde vom găsi progresiile 1, 2, 4, 8 şi 1, 3, 9, 27, medii aritmetice şi medii aromonice.

În Philebos 56 d, e Platon pledează pentru înlocuirea obiectelor empirice (de exemplu sunetele muzicale, mişcarea astrelor) cu numere. În acest fel şi numai în acesta (de sorginte pitagoreică) poate fi depăsit punctul de vedere al experienței, afirmă Platon. În Scrisoarea a VII-a se subliniază că Teoria numerelor, Etica şi doctrina religioasă pitagoriciană sunt legate prin "formule cheie" principii generale şi relații "invariante" care se aplică acestor domenii.

În ceea ce priveşte numerele (în general) Platon admite existența a trei feluri de numere: 1) numerele sensibile lipsite de orice realitate intrinsecă; 2) numerele matematice care au o esență proprie pentru că pot fi definite, însă aceasta se poate repeta pentru un număr infinit de exemple; 3) numerele ideale a căror existență este, dimpotrivă individuală şi numeric singulară.

O analiză detaliată a comentariilor lui Aristotel în legătură cu teoria numerelor la Platon este făcută de L. Robin [L. Robin, La theorie platonicienne des Idées et des Numbers, paris, 1908; Georg Olms Verlagsbuchandlung, Hildeshein, 1963].

După cum am mai precizat, numerele matematice ocupă spațiul intermediar între lumea sensibilă şi lumea Ideilor şi riscăm să reiterăm faptul că, împreună cu celelalte obiecte matematice, constituie calea de legare a celor două lumi. Aceste numere admit o aceeaşi unitate (îi putem spune unitate generatoare), se pot însuma etc., iar generarea lor are loc prin procedeul de însumare repetată a unității.

Numerele ideale sunt (cf. Plaidon) adevărate substanțe cu realitate proprie: nu există decât o Diadă (Taiadă, Decadă originară). Cele 10 asfel de individualități numerice incluzând unitatea alcătuiesc o ierarhie de termeni contigui ce diferă în mod specific unul de altul. Ele rezultă prin reunirea a două principii, unul formal

(Unu – unitatea ca principiu) şi celălalt material (apeirinul denumit şi Altul, Diada, Multiplicitatea). Procesul de generare plecând de la Diada originară este descris de Aristotel ca având două componente duplicarea şi adiția Unității. Unitatea poate fi acelaşi lucru cu Egalul, Diada originară semnifică dedublarea infinitului, oscilația permanentă dincolo sau dincoace de limită etc.

Pe de altă parte Binele, principiul dominant, în concepția lui Platon, poate fi considerat atributul Unității (care poate fi identificată şi cu Ființa).

Mai mult se poate spune că numerele Ideale îşi au fiecare Unitatea proprie şi au față de numerele matematice acelaşi rol pe care îl găsim la Idei fața de lumea sensibilă. În aceaşi timp, după Theofast (Metaph 313), esența Ideilor (Formelor) poate fi definită de cea a numerelor.

În fine, precizăm că în paralel cu numerele ideale Platon dezvoltă şi o teorie a mărimilor ideale despre care vom spune doar că va contine linia, suprafața etc. În acest context apar figurile ideale, segmentul, triunghiul, tetraedrul.

5. Persistența ideilor. Amprenta platonismului este detectabilă (ideile platoniste având rolul lumii formelor față de realitaea sensibilă) în multe dintre curentele matematicii chiar actuale, mai ales în cadrul acelora ce încearcă (cu mai mult sau mai puțin succes) să fundamenteze matematica.

În filosofia matematicii secolului XX se disting logicismul, intuiționismul şi formalismul (corespunzătoare conceptelor asupra universaliilor: realismul, conceptualismul şi, respectiv, nominalismul) ce au evoluat către logicismul pluralist propus de H. Mehlberg [H. Mehlberg; Situation in the Phylosophy of Mathematics; in Logic and Language, B. Kazemeir, D. Vuysjie (eds.)] şi sistemele Quine, respectiv neointuiționismul post – brouwerian şi programul formalist modificat al lui Gentzen [G. Gentzen, Investigations in Logical Deduction, in The Collected Papers, M.E. Szabo (ed.), North - Holland]. Opoziția dintre aceste doctrine este centrată la o primă analiză, pe problema infinitului. Opoziția dintre intuiționism şi logicism se rezumă la faptul că în primul caz se admite un grad de infinitate, în timp ce în cel de-al doilea se acceptă o ierarhizare contoriană a infiniților. Formalismul protestează impotriva universului transcendent acceptând universul imanent. După Quine [W. V. Quine, On what there is ?, P. Benacerrof, H. Putnam (eds.), Phlosophy of Mathematics, Prentice Hall, 1964] diferențele dintre aceste şcoli provin şi din dezacordurile cu privire la domeniul entităților la care variabilele pot să se refere. În logicism (inițiat de G. Freege, dezvoltat de B. Russel şi A. N. Whitehead) acest domeniu conține entitățile abstracte considerate ca existând independent de gândire (precum lumea Ideilor). Nominalismul admite doar variabile ce referă spațio – temporal, sau cel puțin temporal obietele concrete. Totuşi Hao- Wang propune drept unic criteriu de departajare a formalismului (inițiat de D. Hilbert) finitismul său. Intuiționismul (susține H. Poincaré, L. E. J. Brouwer, H. Weil) afirmă existența universalilor (entitățile abstracte) cu condiția că acestea trebuie să fie "inventate" în mod individual din ingredienți specificați anterior. Dupa cum susține Fraenkel diferența dintre logicism şi intuiționism este similară celeia dintre descoperire şi invenție. Realismul este cel mai apropiat de doctrina platoniciană. Principalul reprezentant G. Freege admite o "substanțializare" a noțiunilor (ce preexistă obiectelor concrete), consideră numerele ca vizâd concepte (ne arată cât de mulți indivizi "cad" sub un concept) şi apărând la al doilea nivel al entităților logice [G. Freege, Fundamentele Aritmeticii, Humanitas, 2002]. Recunoaşterea existenței unui "domeniu al obiectelor nereal" poate fi considerată de sorginte platoniciană.

Pe de altă parte supraevaluarea rolului logicii formale în edificarea matematicii a dus la dificultăți ce au determinat creşterea ponderii formalismului hilbertian. Formalismul ca idee de acceptare a lumii ideale a simbolurilor (cu relațiile dintre ele) se apropie şi el de doctrina platoniciană. Concepția conform căreia matematica ar fi o teorie pur formală [H. B. Curry, Foundations of Mathematical Logic, McGraw – Hill, N. Y., 1963] a generat apoi neoplatonismul o au platonismul logic (H. Scholz, G. Hasenjaeger).

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel au atras însă atenția supra unei alte orientări, anume intuiționismul.

Acestă doctrină alege oarecum o cale de mijloc admițând (cu rezervele constructiviste menționate anterior) ideea platoniciană a existenței entităților abstracte, încercând să îndepărteze aspectele vulnerabile ale "euristicii platoniciene".

Dintr-o alta perspectivă menționăm şi că E. Beth [E. Beth, The Foundation of Mathematics, North – Holland, 1959] pune dificultățile impredicativității pe seama ignorării concepției platoniste. Adopând-o în sensul admiterii preexistenței conceptelor matematice ceea ce înseamnă că matematicianul decoperă şi nu inventează, aceste dificultăți pot fi depăşite.

În fine, vom argumenta şi afirmația că platonismul a fost o supoziție filosofică esențială în opera unor mari creatori de matematică.

Spre exemplu A. Fraenkel [A. Fraenkel, Epistemology and Logic, Logic and Language, B. Kazemeir, D. Vuysjie (eds.) O. Reidel Publ. Comp. Dordrecht, Holland, 1962] consideră că poziția lui Gödel este cea a realismului platonician atunci când admite că "obietele matematice există independent de construcțiile noastre sau de intuirea lor individuală, conceptele matematice trebuind doar să fie suficient de clare pentru a le putea rcunoaşte consistența şi adevărul axiomelor care se referă la acestea".

Totuşi platonismul gödelian nu poate fi asimilat în totalitate cu platonismul originar. Realitatea matematică aşa cum este concepută de Gödel având poate mai multe în comun cu cea de "a treia lume" în terminologia lui Popper decât cu ideile transcendente platoniciene.

Însă şirul exemplelor poate continua: G. Cantor îşi alege drept motto un text ce în esență promovează ideea că "noi doar descriem legile născute din vrerea naturii", iar Ch. Hermite consideră că există într-adevăr o întreagă lume care conține orice adevăr matematic la care accedem prin inteligență, exact cum există o lume a realităților fizice.

Amintim, în final, de Leibniz cu a sa Monadologie însă complexitatea legăturilor în doctrina platoniciană impune un amplu studiu separat.