1 Exerciţii şi probleme

(Redactare: dr. Andrei Cuzub şi dr. Silviu Lazorec)

1.1 Mulţimi

1. Fie A şi B două mulţimi. Să se scrie în limbaj matematic, folosind doar relaţia de apartenenţă şi excluzând simboluri precum $\subseteq, \mathcal{P}, \cap, \cup$ următoarele afirmaţii:
   (i) $x \in \mathcal{P}(A)$.
   (ii) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.
   (iii) $x \in \mathcal{P}(A \cap B)$
   (iv) $x \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
   Formulaţi şi negaţiile în limbaj matematic.

2. Fie $I = \{1, 2, 3\}$ şi $A_i = \{i, i+1, i+2, i+3\}$. Determinaţi $\bigcap_{i \in I} A_i$ şi $\bigcup_{i \in I} A_i$.

3. Fie $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ şi pentru fiecare $i \in I$, fie $A_i = \{i, i+1, i-1, 2i\}$.
   (i) Listaţi elementele lui A_i pentru fiecare $i \in I$.
   (ii) Determinaţi $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ şi $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

4. Pentru orice trei mulţimi A, B, C au loc:
   (i) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C = A \setminus B \cap A \setminus C$. Generalizare.
   (ii) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Generalizare.
   (iii) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$. Generalizare
   (iv) $(B \cap C) \setminus A = B \cap (C \setminus A) = (B \setminus A) \cap C$. Generalizare.
   (v) $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

5. Pentru ce mulţimi A are loc $\cup A = \emptyset$?

6. Fie A, B două mulţimi. Atunci $A \times B \neq \emptyset$ dacă şi numai dacă $A \neq \emptyset$ şi $B \neq \emptyset$. Generalizare.

7. Fie A, B două mulţimi nevide. Atunci $A \times B = B \times A$ dacă şi numai dacă $A = B$.

8. Fie $(A_i)_{i \in I}$, $(B_i)_{i \in I}$ două familii de mulţimi indexate de mulţimea I. Arătaţi că:
   (i) $\bigcup_i (A_i \cap B_i) \subseteq \bigcup_i A_i \cap \bigcup_i B_i$. Are loc egalitatea?
   (ii) $\bigcap_i (A_i \cup B_i) \supseteq \bigcap_i A_i \cup \bigcap_i B_i$. Are loc egalitatea?

9. Fie A şi B două mulţimi. Arătaţi că:
   (i) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
   (ii) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. Când are loc egalitatea?

10. Fie A, B, C, D mulţimi. Demonstraţi că:
    (i) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$.
    (ii) $(A \cup B) \times (C \cup D) \supseteq (A \times C) \cup (B \times D)$. Are loc egalitatea?

11. Fie X o mulţime. Pentru $A, B \in \mathcal{P}(X)$, definim $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Arătaţi că, pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$:
    (i) $A \Delta B = \emptyset \iff A = B$.
    (ii) $A \Delta B = B \Delta A$.
    (iii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
    (iv) $A \Delta \emptyset = \emptyset \Delta A = A$.
    (v) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

12. Fie X o mulţime nevidă. Atunci $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$. Când are loc egalitatea?

13. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $(A_i)_{i=\overline{1,n}}$ o familie de n mulţimi. Considerăm mulţimile

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus \cup_{i=1}^{n-1} A_i$$

    Demonstraţi că:

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

    şi că $(B_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt disjuncte două câte două.

14. Fie A, B, C trei mulţimi. Determinaţi mulţimea X astfel încât $A \cap X = A \cap B$ şi $A \cup X = C$.

15. Fie mulţimile A, B, C astfel încât $A \cup B = C$, $(A \cup C) \cap B = C$ şi $(A \cap C) \cup B = A$. Arătaţi că $A = B = C$.

1.2 Relaţii

1. Fie relaţia $\rho = \left(\mathbb{R}, \mathbb{R}, S = \left\{\left(x, x^2\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}\right)$.
(i) Determinaţi ρ^{-1} şi $\rho \circ \rho^{-1}$.
(ii) Arătaţi că ρ este funcţie dar ρ^{-1} nu este funcţie.

2. Fie $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$ şi $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\} \subseteq A \times B$, $S = \{(1, 4), (3, 1), (3, 4)\}$. Notăm $\rho = (A, B, R)$ şi $\tau = (B, C, S)$. Determinaţi $\tau \circ \rho$, $\rho \circ \tau$, $\rho^{-1}, \tau^{-1}, \rho^{-1} \circ \tau^{-1}$, $(\tau \circ \rho)^{-1}$. Desenaţi o diagramă care să reprezinte aceste obiecte.

3. Pe $\mathbb{N}$ considerăm relaţiile $<$ şi $>$. Determinaţi $< \circ <$, $< \circ < \circ <$ şi $> \circ <$.

4. Fie $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (4, 1), (4, 3)\}$, $S = \{(1, 1), (2, 4), (3, 4)\}$, $S' = \{(1, 4), (4, 4)\}$. Determinaţi $(S \cap S') \circ R$, $(S \circ R) \cap (S' \circ R)$, $R \circ (S \cap S')$ şi $(R \circ S) \cap (R \circ S')$.

5. Fie $\rho = (X, Y, R), \sigma = (Y, Z, S), \tau = (Z, W, T)$ trei relaţii. Demonstraţi că:
(i) $\tau \circ (\sigma \circ \rho) = (\tau \circ \sigma) \circ \rho$.
(ii) $(\sigma \circ \rho)^{-1} = \rho^{-1} \circ \sigma^{-1}$.
(iii) $\left(\rho^{-1}\right)^{-1} = \rho$.
(iv) $\rho \circ 1_X = 1_Y \circ \rho = \rho$.

1.3 Funcţii

1. Să se decidă dacă f este o funcţie de la A la B:
(i) $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}, f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\} \subseteq A \times B$.
(ii) $A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}, f = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq A \times B$.
$A = \{a, b, c, d\}, B = \{x, y, z\}, f = \{(a, y), (b, x), (c, y)\} \subseteq A \times B$.

2. Fie $A = \{1, 2, 3\}$ şi $B = \mathcal{P}(A)$. Fie $F : B \longrightarrow B$ funcţia definită prin $F(X) = A \setminus X, \ \forall\ X \in B$.
(i) Determinaţi $F[B]$.
(ii) Fie $B' = \{\{1\}, \{2\}, \{2, 3\}\}$. Determinaţi $F[B']$.
(iii) Fie $B'' = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, \}\}$. Determinaţi $F^{-1}[B'']$.

3. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Arătaţi că:
(i) $f[X \cap X'] \subseteq f[X] \cap f[X']$ pentru orice $X, X' \subseteq A$. Daţi un exemplu când incluziunea e strictă.
(ii) $f[X \cup X'] = f[X] \cup f[X']$ pentru orice $X, X' \subseteq A$.

4. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Arătaţi că:
(i) $f^{-1}(Y \cup Y') = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subseteq B$.
(ii) $f^{-1}(Y \cap Y') = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$ pentru orice $Y, Y' \subseteq B$.

5. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este injectivă.
(ii) pentru orice mulţime C, şi orice funcţii $u, v : C \to A$ are loc: $f \circ u = f \circ v \implies u = v$. (spunem că f este monomorfism de mulţimi).
(iii) există $r : B \to A$ astfel încât $r \circ f = 1_A$ (numim r o retractă a lui f).

6. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este surjectivă.
(ii) pentru orice mulţime C, şi orice funcţii $u, v : B \to C$ are loc: $u \circ f = v \circ f \implies u = v$ (spunem că f este epimorfism de mulţimi).
(iii) există $s : B \to A$ astfel încât $f \circ s = 1_B$ (numim s o secţiune a lui f).
Obs. Pentru (i) $\implies$ (iii) este necesară axioma alegerii.

7. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este bijectivă.
(ii) relaţia inversă f^{-1} este funcţie şi au loc egaliăţile $f^{-1} \circ f = 1_A$ şi $f \circ f^{-1} = 1_B$.
(iii) f este inversabilă: există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ şi $f \circ g = 1_B$.

8. Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii.
(i) Dacă f şi g sunt injective (surjective, respectiv bijective) atunci $g \circ f$ este injectivă (surjectivă, respectiv bijectivă).
(ii) Dacă $g \circ f$ este injectivă atunci f este injectivă.
(iii) Dacă $g \circ f$ este surjectivă atunci g este surjectivă.

9. Fie $f : A \longrightarrow B$ şi $g : B \longrightarrow C$ funcţii. Arătaţi că:
(i) dacă $g \circ f$ este bijectivă, atunci f este injectivă şi g este surjectivă.
(ii) dacă f şi g sunt bijective, atunci $g \circ f$ este inversabilă şi $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

10. Fie A o mulţime finită şi $f : A \longrightarrow A$ o funcţie. Arătaţi că f este injectivă dacă şi numai dacă f este surjectivă. Se păstrează rezultatul în cazul în care A este o mulţime infinită?

11. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Este f injectivă? Care este imaginea funcţiei f?

12. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \backslash \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Este f injectivă? Care este imaginea funcţiei f?

13. Fie X o mulţime. Pentru $A \in \mathcal{P}(X)$, considerăm funcţia $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, definită prin

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \in X \backslash A \end{cases}$$

(χ_A se numeşte funcţia caracteristică a lui A). Pentru orice două submulţimi A, B ale lui X au loc:
(i) $A \subseteq B \implies \chi_A \leq \chi_B$.
(ii) $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x), \forall x \in X$.
(iii) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \chi_B(x), \forall x \in X$.
(iv) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \chi_B(x), \forall x \in X$.
(v) $\chi_{A \backslash B}(x) = \chi_A(x) - \chi_A(x) \chi_B(x), \forall x \in X$.

14. Pentru două mulţimi X, Y notăm prin Y^X mulţimea funcţiilor $f : X \to Y$.
(i) Justificaţi că Y^X este într-adevăr o mulţime (şi nu doar o clasă).
(ii) Aplicaţia $A \mapsto \chi_A$ este o bijecţie între $\mathcal{P}(X)$ şi $\{0, 1\}^X$.
(iii) Există o bijecţie între $(X \times Y)^Z$ şi $X^Z \times Y^Z$, pentru orice mulţimi X, Y, Z.

15. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.
(i) f este injectivă.
(ii) Are loc egalitatea de relaţii $f^{-1} \circ f = 1_A$.
(iii) Pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, $f^{-1}(f(X)) = X$.
(iv) Pentru orice $X, X' \in \mathcal{P}(A)$, avem $f(X \cap X') = f(X) \cap f(X')$.

16. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Următoarele afirmaţii sunt echivalente.
(i) f este surjectivă.
(ii) Are loc egalitatea de relaţii $f \circ f^{-1} = 1_B$.
(iii) Pentru orice $Y \subseteq B$, $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$.
(iv) Pentru orice $X \in \mathcal{P}(A)$, avem $f(X)^c \subseteq f(X^c)$.

17. Fie $f : A \to B$ o funcţie. Notăm prin $f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ funcţia

$$X \in \mathcal{P}(A) \mapsto f_*(X) = f(X) \in \mathcal{P}(B)$$

şi prin $f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, funcţia

$$Y \in \mathcal{P}(B) \mapsto f^*(Y) = f^{-1}(Y) \in \mathcal{P}(A)$$

(a) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este surjectivă; (ii) f_* este surjectivă; (iii) f^* este injectivă; (iv) $f_* \circ f^* = 1_{\mathcal{P}(B)}$.

(b) Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) f este injectivă; (ii) f^* este surjectivă; (iii) f_* este injectivă; (iv) $f^* \circ f_* = 1_{\mathcal{P}(A)}$.

18. Fie $f : X \to Y$ o funcţie şi $\varphi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, $\varphi(A) = f^{-1}(f(A)), A \in \mathcal{P}(X)$. Atunci:
(i) $\varphi \circ \varphi = \varphi$.
(ii) f este injectivă dacă şi numai dacă $\varphi = 1_{\mathcal{P}(X)}$.

19. Fie X o mulţime, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ şi considerăm

$$f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B), f(C) = (A \cap C, B \cap C)$$

Demonstraţi că:
(i) f este injectivă dacă şi numai dacă $A \cup B = X$.
(ii) f este surjectivă dacă şi numai dacă $A \cap B = \emptyset$.
(iii) f este bijectivă dacă şi numai dacă $B = X \backslash A$. Descrieţi în acest caz f^{-1}.

20. Fie $A \neq \emptyset$ şi $f : A \to B$ o funcţie. Atunci există $g : B \to A$ astfel încât $f \circ g \circ f = f$.

21. Pentru $m, n \in \mathbb{R}$, fie funcţia $f_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dată prin:

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} x - m & , x \leq 0 \\ nx + m & , x > 0 \end{cases}$$

Determinaţi valorile parametrilor m, n astfel încât $f_{m,n}$ este: (i) injectivă; (ii) surjectivă; (iii) bijectivă.

22. Fie A o mulţime cu cel puţin 3 elemente şi $\mathcal{S}$ mulţimea bijecţiilor $f : A \to A$. Fie $f \in \mathcal{S}$ astfel încât $g \circ f = f \circ g$ pentru orice $g \in \mathcal{S}$. Atunci $f = 1_A$ (Cu alte cuvinte, grupul permutărilor unei mulţimi cu ≥ 3 elemente, are centrul trivial).

23. Pentru $x \in \mathbb{R}$, fie $f(x) = x - k$ unde k este un număr întreg ce verifică $2k - 1 < x \leq 2k + 1$.
(i) Justificaţi că f este într-adevăr o funcţie.
(ii) Arătaţi că f este surjectivă.
(iii) Arătaţi că preimaginea oricărui $y \in \mathbb{R}$ este formată din exact două puncte.
(Cu alte cuvinte, f ia toate valorile reale de exact două ori).
(iv) Construiţi o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care să verifice $\left|f^{-1}(y)\right| = 3$, pentru orice $y \in \mathbb{R}$.

24. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ fixat. Construiţi o funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ care să verifice $\left|f^{-1}(n)\right| = m$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

25*. (i) Construiţi o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.
(ii) Construiţi o funcţie bijectivă $f : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}$.

26*. (i) Construiţi o funcţie surjectivă $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ astfel încât $h(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
(ii) Construiţi o funcţie surjectivă $h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ astfel încât $h(n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

27*. Pentru orice două funcţii bijective $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, funcţia $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = f(x)\, g(x), x \in \mathbb{Z}$ nu este bijectivă.

1.4 Relaţii de echivalenţă. Relaţii de ordine

1. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A. Scrieţi în limbaj formal următoarele afirmaţii şi negaţiile lor:
(i) ρ este reflexivă;
(ii) ρ este ireflexivă;
(iii) ρ este simetrică;
(iv) ρ este antisimetrică;
(v) ρ este asimetrică;
(vi) ρ este tranzitivă.

2. Daţi exemplu de o mulţime A şi o relaţie ρ pe A astfel încât:
(i) ρ nu este nici reflexivă, nici ireflexivă;
(ii) ρ nu este nici simetrică, nici asimetrică.

3. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A. Demonstraţi că:
(i) ρ este reflexivă dacă şi numai dacă $1_A \subseteq \rho$.
(ii) ρ este simetrică dacă şi numai dacă $\rho = \rho^{-1}$.
(iii) ρ este antisimetrică dacă şi numai dacă $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq 1_A$.
(iv) ρ este tranzitivă dacă şi numai dacă $\rho^2 \subseteq \rho$.
(v) ρ este ireflexivă dacă şi numai dacă $1_A \cap \rho = \emptyset$.
(vi) ρ este asimetrică dacă şi numai dacă $\rho \cap \rho^{-1} = \emptyset$.
(vii) dacă ρ este relaţie de preordine atunci $\rho^2 = \rho$.
(viii) ρ este relaţie de ordine dacă şi numai dacă $\rho^2 = \rho$ şi $\rho \cap \rho^{-1} = 1_A$.
(ix) ρ este relaţie de echivalenţă dacă şi numai dacă $1_A \subseteq \rho$ şi $\rho = \rho^2 = \rho^{-1}$.
(x) ρ este relaţie de ordine şi relaţie de echivalenţă dacă şi numai dacă $\rho = 1_A$.

4. Fie $A = \{a, b, c, d\}$ şi

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (c,d)\}$$

Justificaţi că $\rho = (A, A, R)$ este o relaţie de ordine.

5. **(Relaţia de divizibilitate)** Pe $\mathbb{N}^*$ considerăm relaţia $|$ dată prin: $a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{Z}, b = ac$.
(i) Arătaţi că $|$ este o relaţie de ordine care nu este totală.
(ii) Pentru $a, b \in \mathbb{N}^*$, determinaţi $\inf \{a, b\}$ şi $\sup \{a, b\}$.
(iii) Determinaţi elementele minimale ale lui $(\mathbb{N}^*, |)$. Există un prim element?
(iv) Admite $(\mathbb{N}^*, |)$ elemente maximale?
(v) Pe $\mathbb{Z}^*$, este $|$ o relaţie de ordine? Dar pe $\mathbb{R}[X]$, respectiv $\mathbb{Z}[X]$?

6. Fie $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq n \leq 37\}$ şi fie " $\preccurlyeq$ " o relaţie pe A definită prin: $n \preccurlyeq m \Leftrightarrow n$ divide pe m.
(i) Să se demonstreze că $\preccurlyeq$ este o relaţie de ordine pe A.
(ii) Este această relaţie totală? Are mulţimea A elemente minimale? Dar maximale?
(iii) Să se verifice dacă mulţimea $M = \{4, 9, 12, 36\}$ are minoranţi, majoranţi, prim element, ultim element, margine inferioară, margine superioară şi, în fiecare caz afirmativ, să se precizeze elementele respective.

7. Arătaţi că pe $\mathbb{C}$ nu se poate defini o relaţie de ordine $\leq$ compatibilă cu ordinea uzuală de pe $\mathbb{R}$ şi cu structura de corp.

8. **(Ordinea lexicografică)** Fie $(A, \leq)$ şi $(B, \leq)$ două mulţimi ordonate. Pe $A \times B$ considerăm relaţia

$$(a, b) \leq (a', b') \iff (a < a') \vee (a = a' \wedge b \leq b')$$

(i) Arătaţi că $(A \times B, \leq)$ este o mulţime ordonată .
(ii) Dacă A şi B sunt total ordonate atunci şi $A \times B$ este total ordonată.
(iii) Dacă A şi B sunt bine ordonate atunci şi $A \times B$ este bine ordonată.

9. (**Ordinea produs pe** $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) Considerăm pe $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaţia $(a, b) \leq (c, d) \iff a \leq c$ şi $b \leq d$
(i) Arătaţi că ρ este o relaţie de ordine. Este ρ o relaţie de ordine totală?
(ii) Fie $A = \{(a, b), (c, d)\}$. Determinaţi $\inf A$ şi $\sup A$. (iii) Reprezentaţi grafic mulţimea $B = \{(x, y) \mid x^2 + y < 9\}$.
Determinaţi, dacă există, $\min B, \inf B, \max B, \sup B$.

10. Fie A o mulţime. Pe $X = \mathcal{P}(A)$ considerăm relaţia de incluziune $\subseteq$.
(i) Justificaţi că $(X, \subseteq)$ este o mulţime ordonată. Când este total ordonată?
(ii) Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n \in X$. Determinaţi $\inf \{A_1, \ldots, A_n\}$ şi $\sup \{A_1, \ldots, A_n\}$.
(iii) Determinaţi elementele minimale şi maximale ale lui X, respectiv $X \setminus \{\emptyset, A\}$.

11. Fie $f : A \to B$ o funcţie şi $\sim$ relaţia pe A definită astfel: $x \sim y \iff f(x) = f(y)$. Arătaţi că:
(i) $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe A. Notăm $\pi : A \to \tilde{A} := A/\sim$ proiecţia canonică.
(ii) Există şi este unică o funcţie $\tilde{f} : \tilde{A} \to B$ astfel încât $\tilde{f} \circ \pi = f$. (Spunem că f induce funcţia $\tilde{f}$ pe spaţiul factor).
(iii) $\tilde{f}$ este injectivă şi $\operatorname{Im} \tilde{f} = \operatorname{Im} f$.
Exemplificaţi pe: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z^2$.

12. Pe $\mathbb{R}$ considerăm relaţia $\equiv$ dată prin $x \equiv y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.
(i) Arătaţi că $\equiv$ este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$, $f(x) = \{x\}$ (partea fracţionară a lui x) induce o bijecţie între $\mathbb{R}/\equiv$ şi $[0, 1)$.

13. Pe $\mathbb{R}^2$ considerăm relaţia $\sim$ dată prin:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$$

(i) Arătaţi $\sim$ este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Arătaţi că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ este o funcţie compatibilă cu $\sim$.
(iii) Arătaţi că există o bijecţie între $\mathbb{R}^2/\sim$ şi $[0, \infty)$.
(iv) Reprezentaţi grafic clasa de echivalenţă a lui $(0, 0)$ şi a lui $(1, 0)$.

14. Se consideră următoarele date:
(i) A=mulţimea tuturor oamenilor; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow a$ şi b au în comun cel puţin un prenume.
(ii) $A = \mathbb{R}$; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow 0 < |a - b| < 1$.
(iii) $A = \mathbb{Q}$; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow a \leq b$.
(iv) $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(n \geq 2)$, ρ o relaţie pe A dată prin: $A\rho B \Leftrightarrow \exists\, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă astfel încât $A = Q^{-1}YQ$.
Verificaţi dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe A.

15. Se consideră următoarele date:
(i) A =mulţimea tuturor oamenilor; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow a$ şi b au aceeaşi vârstă exprimată în ani;
(ii) $A = \mathbb{Z}$; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow 7|a-b$;
(iii) $A = \mathbb{Z}$; ρ o relaţie pe A dată prin: $a\rho b \Leftrightarrow a$ şi b dau acelaşi rest la împărţirea cu 5;
(iv) A =mulţimea cercurilor dintr-un plan π; ρ o relaţie pe A dată prin: $C_1\rho C_2 \Leftrightarrow$ cercurile C_1 şi C_2 au acelaşi centru.
Să se verifice dacă ρ este o relaţie de echivalenţă pe A. În caz afirmativ, precizaţi cu cine poate fi identificată o clasă de echivalenţă şi mulţimea factor A/ρ.

16*. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A şi $\bar{\rho} = \cup_{n\geq 1}\rho^n$. Arătaţi că $\bar{\rho}$ este cea mai mică relaţie tranzitivă pe A care include pe ρ.
Obs. $\rho^n = \rho \circ \rho \circ \cdots \circ \rho$ (n factori). Dacă $\rho = (A, A, R)$ şi $\sigma = (A, A, S)$ atunci, prin definiţie, $\rho \cup \sigma = (A, A, R \cup S)$.

17*. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A şi

$$\bar{\rho} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\rho \cup \rho^{-1} \cup 1_A\right)^n$$

Arătaţi că $\bar{\rho}$ este cea mai mică relaţie de echivalenţă pe A, ce o include pe ρ.

18*. Fie ρ o relaţie pe mulţimea A şi $\bar{\rho} = \rho \cup \rho^{-1} \cup 1_A$. Atunci:
(i) $\rho \subseteq \bar{\rho}$ şi $\bar{\rho}$ este reflexivă şi simetrică.
(ii) Dacă ρ' este o relaţie reflexivă şi simetrică pe A astfel încât $\rho' \supseteq \rho$ atunci $\rho' \supseteq \bar{\rho}$.
Cu alte cuvinte, $\bar{\rho}$ este cea mai mică relaţie pe A, ce este reflexivă şi simetrică şi o include pe ρ.

19*. Fie ρ_1, ρ_2 două relaţii de echivalenţă pe o mulţime A. Arătaţi că $\rho_1 \circ \rho_2$ este o relaţie de echivalenţă dacă şi numai dacă $\rho_1 \circ \rho_2 = \rho_2 \circ \rho_1$. În acest caz arătaţi că $\rho_1 \circ \rho_2$ este cea mai mică relaţie de echivalenţă ce le include pe ρ_1 şi ρ_2.

20. Fie $A \neq \emptyset$. Arătaţi că
(i) Dacă ρ, ρ' sunt relaţii de ordine atunci $\rho \cap \rho'$ şi ρ^{-1} sunt relaţii de ordine.
(ii) Dacă ρ este o relaţie de ordine strictă pe A atunci ρ este asimetrică şi $\rho \cup 1_A$ este o relaţie de ordine. Invers, dacă ρ este o relaţie de ordine pe A atunci $\rho \backslash 1_A$ este o relaţie de ordine strictă.
(iii) Daţi un exemplu de relaţii de ordine ρ şi ρ' astfel încât $\rho \cup \rho'$ să fie (respectiv, să nu fie) relaţie de ordine.

21. Câte relaţii de ordine totale se pot defini pe o mulţime cu n elemente?

22. Pe $\mathbb{R}$ considerăm relaţia $\equiv$ dată prin

$$x \equiv y \iff \frac{1}{2\pi}(x-y) \in \mathbb{Z}$$

(i) Arătaţi că $\equiv$ este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{R}$.
(ii) Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$ induce o bijecţie între $\mathbb{R}/\equiv$ şi $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

23. Pe $\mathbb{C}^\times$ considerăm relaţia $\equiv$ dată prin:

$$x \equiv y \iff x^3 = y^3$$

(i) Arătaţi că $\equiv$ este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Câte elemente are fiecare clasă de echivalenţă.
(iii) Arătaţi că $\mathbb{C}^\times/\equiv$ este în bijecţie cu $\mathbb{C}$.

24. Pe $\mathbb{R}^2$ considerăm relaţia $\sim$ dată prin:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff |x| + |y| = |x'| + |y'|$$

(i) Arătaţi $\sim$ este o relaţie de echivalenţă.
(ii) Arătaţi că $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = |x| + |y|$ este o funcţie compatibilă cu $\sim$.
(iii) Arătaţi că există o bijecţie între $\mathbb{R}^2/\sim$ şi $[0,\infty)$.
(iv) Reprezentaţi grafic clasa de echivalenţă a lui $(0,0)$ şi a lui $(1,0)$.

25. Fie $f : A \to B$ o funcţie şi $\sim$ o relaţie de echivalenţă pe A. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) Pentru orice $x, y \in A$, are loc implicaţia $x \sim y \implies f(x) = f(y)$ (spunem, în acest caz, că f este compatibilă cu ˜).
(ii) Există şi este unică o funcţie $\tilde{f} : A/\sim \to B$ astfel încât $\tilde{f} \circ \pi = f$ unde $\pi : A \to A/\sim$ este proiecţia canonică. (Spunem că f induce funcţia $\tilde{f}$ pe spaţiul factor).

26. Fie $\sim_A$şi $\sim_B$ relaţii de echivalenţă pe mulţimile A, respectiv B. Notăm prin $\pi_A : A \to A/\sim_A$ şi $\pi_B : B \to B/\sim_B$ proiecţiile canonice. Considerăm o funcţie $f : A \to B$ astfel încât pentru orice $x, y \in A$ are loc:
$$x \sim_A y \implies f(x) \sim_B f(y)$$
Arătaţi că există şi este unică o funcţie $\tilde{f} : A/\sim_A \to B/\sim_B$ astfel încât $\tilde{f} \circ \pi_A = \pi_B \circ f$.
Caz particular: $\sim_B$ este relaţia de egalitate pe B.

27. Fie X o mulţime şi Y o submulţime a sa. Pe $\mathcal{P}(X)$ definim relaţia
$$A \rho B \iff A \cap Y = B \cap Y$$
Demonstraţi că ρ este o relaţie de echivalenţă şi că există o bijecţie între $\mathcal{P}(X)/\rho$ şi $\mathcal{P}(Y)$.

28. Fie X o mulţime cu 4 elemente. Câte relaţii de echivalenţă se pot defini pe X?

29. Fie $(X, \preceq)$ o mulţime preordonată. Definim pe X relaţia de echivalenţă $\equiv$:
$$x \equiv y \iff x \preceq y \text{ şi } y \preceq x$$
Pe mulţimea cât $\tilde{X} := X/\equiv$ considerăm relaţia $\leq$:
$$\tilde{x} \leq \tilde{y} \iff x \preceq y, \forall x, y \in X$$
(i) Arătaţi că $\equiv$ este într-adevăr o relaţie de echivalenţă.
(ii) Arătaţi că $\leq$ este o relaţie bine definită (i.e. nu depinde de reprezentanţii aleşi).
(iii) Arătaţi că $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\tilde{X}$.

1.5 Inducţie. Cardinali. Mulţimi finite

1. Fie $a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0$. Există şi sunt unice $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încât $a = bq + r$ şi $r < b$.

2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $g \neq 0$. Există şi sunt unice $q, r \in \mathbb{R}[X]$ astfel încât $f = gq + r$ şi r este sau polinomul 0 sau $\deg r < \deg g$.

3. (i) Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 < 1 < x_2$ atunci $x_1 + x_2 \geq x_1 x_2 + 1$.
(ii) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pentru orice numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$, are loc $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n$.
(iii) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pentru orice numere reale pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are loc
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

4. Demonstraţi că suma cuburilor oricăror trei numere consecutive se divide cu 9.

5. Calculaţi sumele şi demonstraţi formulele obţinute prin inducţie:
(i) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
(ii) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.
(iii) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n \cdot (n+1)$.

6. Fie şirul $(x_n)_{n \geq 1}$ dat prin $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ şi $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Arătaţi că
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

7. Să se demonstreze că
$$\{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 8\} \subseteq \{3p + 5q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$$

8. În câte regiuni împart planul n drepte concurente?

9. Câte drepte determină n puncte în plan, oricare trei necoliniare?

10. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Dacă $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ şi $B = \{1, \ldots, m\}$, arătaţi că $A \times B$ are mn elemente.

11. Fie A o mulţime cu n elemente şi B o mulţime cu m elemente. Câte funcţii se pot defini de la A cu valori în B.

12. Fie A o mulţime cu n elemente. Câte elemente are $\mathcal{P}(A)$?

13. Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}^*$, dată prin

$$f(n) = \begin{cases} 2n, n > 0 \\ -2n + 1, n \leq 0 \end{cases}$$

Arătaţi că f este bijectivă şi determinaţi-i inversa.

14*. Fie $f : \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ dată prin:

$$f(x, y) = \frac{(x + y - 1)(x + y - 2)}{2} + x$$

Arătaţi că f este bijectivă.
Indicatie. Reprezentaţi funcţia f ca o matrice infinită, unde pe poziţia (i, j) se află valoarea $f(i, j)$.

15. Daţi exemplu de
(a) o funcţie biijectivă $f : A \to B$;
(b) o funcţie injectivă, dar nesurjectivă $g : A \to B$;
(c) o funcţie surjectivă dar neinjectivă $h : A \to B$
în fiecare dintre următoarele cazuri:
(i) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$.
(ii) $A = \mathbb{N}^*$, $B = \mathbb{N}$.
(iii) $A = [0, 1]$, $B = (0, 1)$.
(iv) $A = [0, 1)$, $B = (0, 1)$.
(v) $A = \mathbb{R}$, $B = (0, 1)$.
(vi) $A = (0, 1)$, $B = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$.