Aurelian Claudiu VOLF

Logică şi teoria mulţimilor

Universitatea „Al. I Cuza" Iaşi

2020

Unele părţi ale versiunilor preliminare ale acestor note de curs au fost redactate împreună cu regretatul Prof. dr. Ioan Vrabie. Unele exerciţii şi probleme îi au drept autori pe Dr. Andrei Cuzub şi Dr. Silviu Lazorec. Prof. dr. Eugen Vărvărucă a făcut observaţii utile pe variante precedente ale acestor note. Un gînd bun şi mulţumiri tuturor!

Cuprins

Către cititor

Parcurgerea unui text matematic este un proces *activ* prin excelenţă. Trebuie să aveţi creion şi hîrtie cînd citiţi acest curs (sau orice text matematic)!

- Toate definiţiile nou introduse trebuie să fie legate de noţiunile deja cunoscute prin *căutarea de exemple (şi contraexemple)* de obiecte care să satisfacă definiţiile. Acest pas este strict necesar pentru crearea suportului intuitiv al noţiunilor. *Nu vă limitaţi în a învăţa pe de rost definiţiile sau teoremele!*

- Cititorul trebuie să *verifice* pe cazuri concrete şi să *demonstreze* afirmaţiile din text. În particular, toate apariţiile unor fraze de tipul „se verifică uşor că …”, „evident, …”, … sînt o invitaţie la demonstrarea efectivă a afirmaţiilor respective. Aceste exerciţii intelectuale sînt un pas *indispensabil* spre asimilarea conceptelor şi tehnicilor introduse şi, totodată, o verificare a înţelegerii de către cititor a textului.

Paragrafele care au o bară la stînga sînt foarte importante pentru înţelegerea textului.

Paragrafele care au o linie ondulată la dreapta pot fi omise şi sînt destinate unui cititor avizat sau interesat de aspecte mai profunde ale teoriei.

Peste tot, în text:

- $|A|$ desemnează cardinalul mulţimii A (numărul elementelor lui A, dacă A este finită).
- $x := y$ înseamnă „x este egal prin definiţie cu y” (unde y este deja definit) sau „notăm pe y cu x”.
- $\square$ marchează sfîrşitul sau absenţa unei demonstraţii. Adesea, aceasta înseamnă că *cititorul este invitat să facă el însuşi demonstraţia!*

I. Logică. Limbaj matematic

I.1. Definiţii

Textele matematice, deşi sînt scrise în limbaj natural (în cazul nostru limba română), nu pot fi înţelese de un cititor neavizat. De multe ori, cuvintele folosite în texte matematice nu există în limbajul uzual (ex: *nilpotent*, *abscisă*) sau au un alt sens decît în limbajul uzual (exemple: *grup, inel, corp, ideal*, *derivată, funcţie.* Puteţi da şi alte exemple?).

În matematică toate noţiunile sînt *definite* în mod riguros[1]. *Înţelegerea oricărui text matematic presupune cunoaşterea tuturor definiţiilor noţiunilor care apar!*

1.1 Exemplu. Are loc teorema următoare: *În orice grup finit, ordinul oricărui element divide ordinul grupului.* Deşi fiecare cuvînt „înseamnă ceva” pentru oricine, sensul frazei nu poate fi înţeles dacă cititorul nu ştie exact sensul cuvintelor „grup”, „grup finit”, „ordinul unui element”, „divide”.

O *definiţie* este o delimitare precisă a unei familii particulare de obiecte dintr-una mai amplă, deja cunoscută (numită *gen proxim*), prin intermediul unei proprietăţi pe care o au obiectele nou definite şi numai ele (proprietate numită *diferenţă specifică*). Desigur, aceasta este o descriere a ceea ce se înţelege printr-o definiţie şi nicidecum o definiţie a definiţiei.

Orice definiţie trebuie să conţină trei elemente:
- *numele noţiunii nou definite*
- *genul proxim*
- *diferenţa specifică*

1.2 Exemplu de definiţie. Se numeşte *triunghi echilateral* un triunghi ale cărui laturi sînt congruente între ele.

---

[1] Cu excepţia *noţiunilor primare*, care nu sînt definite. Ne vom ocupa în curînd de noţiuni primare.

Numele noţiunii nou definite: *triunghi echilateral*. Genul proxim: *triunghi*. Diferenţa specifică: proprietatea triunghiului de a avea laturile congruente între ele.

O definiţie *poate fi înţeleasă doar de cineva care ştie deja ce este genul proxim* (în cazul nostru triunghi) şi *ştie noţiunile care apar în diferenţa specifică* (în cazul de faţă: noţiunea de latură a unui triunghi, definiţia relaţiei de congruenţă între laturi).

Uneori, definiţia de mai sus se dă sub forma:

- *Triunghiul echilateral* este triunghiul ale cărui laturi sînt congruente între ele.

Deşi această formă este larg utilizată, nu o recomandăm, deoarece în limba română articolul hotărît (*triunghiul*) se foloseşte în general cînd este vorba de singur obiect (un singur triunghi), ceea ce nu este cazul aici.

Se mai poate da această definiţie sub alte forme, de exemplu:

- Numim triunghi echilateral un triunghi ale cărui laturi sînt congruente între ele.
- Un triunghi se numeşte triunghi echilateral dacă laturile sale sînt congruente între ele.
- Spunem că un triunghi este triunghi echilateral dacă laturile sale sînt congruente între ele.
- Un triunghi echilateral este un triunghi ale cărui laturi sînt congruente între ele.

Ultima formă *nu* este recomandată, pentru ca nu se scoate în evidenţă numele noţiunii nou definite (prin sintagmele „Numim” sau „se numeşte” sau „Spunem că”). Mai mult, se poate confunda această definiţie cu o teoremă (vom reveni asupra acestei confuzii).

Forma pe care o recomandăm pentru o definiţie este:

Se numeşte {numele noţiunii nou definite} un/o {numele genului proxim} care are proprietatea {diferenţa specifică}.

1.3 Exerciţiu. Identificaţi elementele definiţiilor următoare (numele noţiunii, gen proxim, diferenţa specifică) şi reformulaţi definiţiile ca în diversele variante din exemplul precedent.

a) (din Wikipedia) Copacul este o plantă perenă, multianuală, cu un trunchi lemnos evident cu ramuri dezvoltate ce prezintă frunze, flori, din care se dezvoltă fructe și rădăcini ce au forme diferite după specie.

b) Se numeşte număr par un număr natural care este divizibil cu 2.

c) Se numeşte număr transcendent un număr complex care nu este rădăcină a vreunui polinom nenul cu coeficienţi raţionali.

În definiţiile din acest curs, vom scrie cu *italice* numele noţiunii nou definite.

Revenim la definiţia „Se numeşte *triunghi echilateral* un triunghi ale cărui laturi sînt congruente între ele.” O formulare mai precisă, indispensabilă pentru folosirea efectivă în cazuri practice, este:

„Fie ABC un triunghi. Spunem că triunghiul ABC este echilateral dacă $AB \equiv BC \equiv CA$.”

Reformulaţi în acest stil exemplele matematice din exerciţiul mai sus.

O cerinţă esenţială pe care trebuie să o respecte o definiţie este de a fi *consistentă*. Aceasta înseamnă că genul proxim trebuie să conţină măcar un obiect care să aibă toate proprietăţile cerute de diferenţa specifică. Un astfel de obiect se numeşte *exemplu* pentru definiţia respectivă. În cazul definiţiei noţiunii de *număr par* un astfel de exemplu este numărul natural 0. Cunoaşteţi un exemplu de număr transcendent (vezi definiţia de la c)?

Exerciţii

1. Identificaţi elementele definiţiilor următoare (numele noţiunii, gen proxim, diferenţa specifică) şi reformulaţi definiţiile în diverse variante, ca în exemplul **1.2**.

a) Se numeşte dreptunghi un patrulater cu trei unghiuri drepte.

b) Se numeşte funcţie injectivă o funcţie cu proprietatea că transformă orice două puncte distincte din domeniu în două puncte distincte din codomeniu.

c) Se numeşte grup comutativ un grup $(G, \circ)$ cu proprietatea că pentru orice două elemente x, y din G are loc $x \circ y = y \circ x$.

d) Se numeşte număr prim un număr natural, mai mare decît 1, ai cărui singuri divizori sînt 1 şi numărul însuşi.

e) Se numeşte mulţime închisă o mulţime de numere reale care este complementara unei mulţimi deschise.

f) Două drepte se numesc paralele dacă sînt coplanare şi nu au în comun niciun punct.

g) Trei drepte se numesc concurente dacă au în comun un punct şi numai unul singur.

I.2. Limbajul matematic

Textele matematice (inclusiv demonstraţiile) sînt texte corect scrise în limba română (sau în altă limbă naturală, de obicei engleză[2]). Veţi vedea exemple de astfel de texte la diversele cursuri pe care le veţi avea sau în cărţi de matematică. Dacă veţi redacta texte matematice (de obicei enunţuri de teoreme, definiţii, demonstraţii), ţineţi cont de aceasta!

---

[2] Este foarte recomandat să ştiţi (sau să învăţaţi serios) engleză (şi franceză, dacă ştiţi deja engleză) pentru a avea acces la o gamă largă de texte matematice. În cazul în care e greu de găsit o resursă matematică în româneşte pe o anumită temă, e aproape sigur că o veţi găsi în engleză.

Subliniem *importanţa utilizării corecte a limbii*, o atenţie specială trebuind a fi acordată semnelor de punctuaţie. Lipsa sau prezenţa acestora (i.e.[3] plasarea lor neinspirată) poate modifica dramatic înţelesul unei propoziţii. Să luăm drept exemplu propoziţia (culeasă dintr-o emisiune televizată): "Stăm de vorbă cu Florin, de 19 ani student în anul întîi." Lipsa virgulei între ani şi student – virgulă care ţine locul conjuncţiei "şi" – modifică radical înţelesul dorit, anume că: Florin are 19 ani şi este în anul întîi, precizînd fără nici un dubiu că: perioada în care Florin a fost şi încă mai este student în anul întîi este de 19 ani, ceea ce . . . este cu totul altceva. Un alt exemplu de acelaşi tip (cules chiar dintr-o carte de matematică) evidenţiază nu numai importanţa plasării corecte a virgulei, dar şi dependenţa înţelesului unei propoziţii de ordinea termenilor: „Teorema de uniformă convergenţă a lui Weierstrass" doreşte să exprime de fapt „Teorema lui Weierstrass de uniformă convergenţă". Putem exprima corect acelaşi lucru plasînd virgula la locul cuvenit, adică „Teorema de uniformă convergenţă, a lui Weierstrass".

De asemenea, unele permutări de cuvinte sau de grupuri de cuvinte pot schimba radical înţelesul pe care intenţionăm să-l atribuim unui enunţ. De exemplu, sensul propoziţiei: „Ursul a mai atacat o femeie care se afla la păscut, cu vacile." (Realitatea TV, 15.09.2012, ora 18:25) este cu totul altul decît cel avut în vedere: „Ursul a mai atacat o femeie care se afla cu vacile la păscut."

I.3. Elemente de logică naivă. Propoziţii, operatori logici

În această secţiune definiţiile nu sînt riguroase. Definiţii riguroase ale noţiunilor întîlnite aici vor fi date în cadrul capitolului *Teoria axiomatică a mulţimilor*.

În cadrul logicii, o *propoziţie* sau un enunţ este o constatare spusă, scrisă, gîndită, sau exprimată în orice mod, *care este fie adevărată, fie falsă*.[4] Adevărul (notat cu a sau 1) şi falsul (notat cu f sau 0), poartă numele de *valori de adevăr ale unei propoziţii*.

De exemplu: "Mihai are părul blond." este o propoziţie, a cărei valoare de adevăr, a sau f, poate fi stabilită prin verificare directă – observarea subiectului, Mihai, – sau indirect prin observarea unei fotografii color a subiectului.

Formulările: "Cînd plouă?", "Du-te acasă!" nu sînt propoziţii în sensul logicii, pentru că nu au valoare de adevăr. În accepţiunea gramaticală, prima este o propoziţie interogativă iar cea de-a doua o propoziţie imperativă.

[3] Prescurtarea i.e. provine de la expresia latină *id est* şi înseamnă: altfel spus, cu alte cuvinte, adică.

[4] Pentru ca această definiţie să fie riguroasă, ar fi trebuit ca în prealabil să fi definit riguros noţiunile de "constatare", "spusă", "adevărată", "falsă"...

Pentru ca o anumită formulare să fie o propoziţie, trebuie să fie adevărată sau falsă, dar nu este necesar să fim în stare a-i stabili valoarea de adevăr. De exemplu, enunţul „Orice număr par mai mare ca 3 este suma a două numere prime”[5] este o propoziţie, dar valoarea sa de adevăr nu este cunoscută încă.

Este foarte important să subliniem că există o distincţie între forma de exprimare a unei propoziţii şi propoziţia însăşi. Mai precis, una şi aceeaşi propoziţie poate fi exprimată în mai multe moduri. De exemplu, propoziţia „Mihai are părul blond.” admite formularea echivalentă „Părul lui Mihai este blond.”. Deşi aceste două formulări sînt distincte, ele exprimă acelaşi lucru (este vorba de aceeaşi propoziţie din punct de vedere logic).

Expresia „Numărul natural x^2 este par” *nu este o propoziţie în sensul logicii* deoarece nu are o valoare de adevăr: înlocuind x cu diverse numere naturale concrete se obţin diverse propoziţii, care pot fi adevărate sau false. Se spune că „expresia conţine variabila liberă x”. Vom reveni la secţiunea „Predicate” pe aceasta temă, extrem de importantă.

În schimb, enunţul „Pentru orice număr natural x, x^2 este par” *este o propoziţie* (falsă). La fel, „Există un număr natural x astfel încît x^2 este par”, este o propoziţie (adevărată).

Formulăm patru principii fundamentale ale logicii matematice:

Principiul identităţii

Principiul non-contradicţiei

Principiul terţului exclus

Principiul raţiunii suficiente

Conform *principiului identităţii*, în cadrul oricărui proces de raţionament, noţiunile, propoziţiile, predicatele, notaţiile, etc., *trebuie utilizate într-o singură accepţiune şi numai una*. Orice abatere de la această regulă este o sursă de neadevăr şi confuzie.

Un raţionament – eronat – de tipul:

„Bluza este roşie. Roşia este o legumă[6]. Deci bluza este o legumă.”

este bazat pe încălcarea principiului identităţii prin utilizarea termenului „roşie” în două accepţiuni (sensuri) diferite: prima de proprietate (nume de culoare) şi cea de-a doua de nume al unei legume. Subliniem că acest principiu are drept consecinţă că *un acelaşi simbol, în cadrul unui raţionament, nu poate nota obiecte diferite*. De aici decurge *regula substituţiei*, care afirmă că *substituirea unei variabile într-o expresie trebuie făcută peste tot unde apare cu unul şi acelaşi obiect.* De exemplu, într-un raţionament geometric, dacă notăm un punct cu litera A, nici un alt punct nu va mai putea fi notat cu A.

Principiul non-contradicţiei spune că o propoziţie nu poate fi şi adevărată şi falsă în acelaşi timp. *Principiul terţului exclus* afirmă că orice propoziţie este adevărată sau falsă, iar o a treia

[5] Aceasta este conjectura lui Goldbach.

[6] Deşi unii ar putea argumenta corect că roşia e un fruct! Observaţi iarăşi necesitatea convenirii asupra unor definiţii riguroase şi unanim acceptate.

posibilitate nu există.[7] Aceste două principii sînt de fapt implicite în „definiţia” pe care am dat-o noţiunii de propoziţie.

Raţionamentele logice din matematică pretind justificări fundamentate şi complete. Această cerinţă este cuprinsă în *principiul raţiunii suficiente*: *exceptînd axiomele, toate afirmaţiile acceptate drept adevărate se bazează doar pe demonstraţii corecte, care folosesc numai adevăruri deja cunoscute, suficient de întemeiate. În plus, concluziile trebuie obţinute doar pe cale deductivă.* Cu alte cuvinte, pentru a stabili faptul că o propoziţie este adevărată sau falsă trebuie să ne sprijinim pe o argumentaţie riguroasă, deductivă, bazată pe o „cantitate suficientă de adevăr”. Aceasta revine la a spune că logica nu acceptă: argumente care se bazează pe propoziţii false; argumente de autoritate de tipul „pentru că aşa s-a spus la televizor”; argumente care pot fi corecte, dar sînt incomplete – precum cele inductive.[8]

3.1 Exemplu. Iată un exemplu de inducţie incompletă. Enunţul „$n^3 - n$ este divizibil cu 3” este adevărat pentru $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. (verificaţi!). Dar aceasta nu constituie o demonstraţie că „Pentru orice n natural, $n^3 - n$ este divizibil cu 3.” (Acest enunţ este adevărat! Puteţi să-l demonstraţi?)

Exerciţii

1. Care dintre următoarele expresii sînt propoziţii?

a) Pomii sînt verzi.

b) Fie ABC un triunghi isoscel.

c) Pătratul are toate laturile congruente.

d) Pătratul are exact două laturi congruente.

e) Cine este autorul teoremei: “o paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale”?

f) De ce $\triangle ABC$ este echilateral?

g) Orice funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ continuă, este derivabilă.

h) Toate funcţiile, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ continue, sînt derivabile.

i) Există o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, φ continuă, care nu este derivabilă.

j) Nici o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă, nu este derivabilă.

k) Nu există o funcţie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă, care să fie derivabilă.

l) Nu există o funcţie, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continuă care să nu fie derivabilă.

---

[7] Acest principiu mai este cunoscut sub forma sa în latină: *Tertium non datur.*

[8] Este vorba de aşa-numita "inducţie incompletă", nu de inducţia matematică.

m) Dacă $x \le 3$ atunci $x^{10} > 10$.

n) $x \le 3$.

o) $(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$.

p) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

q) Pentru orice $a \in \mathbb{C}$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

r) Pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

s) $x \cdot x^{-1} = 1$.

I.4. Operatori logici. Calcul propoziţional

Operatorii logici permit formarea de propoziţii noi, pornind de la propoziţii existente.

4.1 Definiţie. Disjuncţia. Fie p, q propoziţii. Formăm o nouă propoziţie, notată $p \vee q$, care se citeşte „p sau q” şi poartă numele de *disjuncţia propoziţiilor p şi q*. Ca să definim corect din punct de vedere logic $p \vee q$, trebuie sa precizăm valoarea sa de adevăr (în funcţie de valorile de adevăr ale propoziţiilor p, q):

$p \vee q$ este adevărată exact atunci cînd cel puţin una dintre propoziţiile p sau q este adevărată. Aşadar, $p \vee q$ este falsă exact atunci cînd atît p cît şi q sînt false. Această definiţie a valorii de adevăr a lui $p \vee q$ se poate da cu ajutorul tabelului de adevăr :

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

S-au scris pe linii toate combinaţiile posibile de valori de adevăr pentru p şi q.

Tabelul se citeşte pe linii: de exemplu, linia 3 a tabelului spune, că, dacă p are valoarea de adevăr 0, iar q are valoarea de adevăr 1, atunci $p \vee q$ are valoarea de adevăr 1.

4.2 Exemplu. “Florin nu este acasă sau telefonul lui este defect” este un enunţ de forma $p \vee q$, unde p este “Florin nu este acasă”, iar q este “Telefonul lui Florin este defect”.

“Patrulaterul *ABCD* este pătrat sau patrulaterul *ABCD* este romb.” Această propoziţie este adesea enunţată mai pe scurt “Patrulaterul *ABCD* este pătrat sau romb.” Este important de identificat structura logică a unei propoziţii “compuse” de acest tip.

4.3 Definiţie. Conjuncţia. Fie p, q propoziţii. Formăm o nouă propoziţie, $p \wedge q$, care se citeşte "p şi q", numită *conjuncţia propoziţiilor p şi q*. Propoziţia $p \wedge q$ este adevărată exact atunci cînd ambele propoziţii p şi q sînt adevărate. Deci, $p \wedge q$ este falsă exact atunci cînd măcar una dintre ele este falsă. Corespunzător, avem tabelul de adevăr:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4.4 Definiţie. Negaţia. Fie p o propoziţie. Formăm o nouă propoziţie, $\neg p$, care se citeşte "non p", numită *negaţia propoziţiei p*. Propoziţia $\neg p$ este adevărată exact atunci cînd p este falsă:

p	$\neg p$
1	0
0	1

4.5 Exemple. a) Negaţia propoziţiei "Orice om este muritor" este "Nu orice om este muritor". Forme echivalente: "Există un om care nu este muritor" – preferată – sau "Nici un om nu este muritor" – pe care o vom evita.

Negaţia propoziţiei "Există triunghiuri cu două unghiuri drepte" este "Nu există un triunghi care să aibă două unghiuri drepte"– preferată. Forme echivalente: "Orice triunghi nu are două unghiuri drepte" – preferată; "Nici un triunghi nu are două unghiuri drepte" – pe care o vom evita. În ambele exemple, ultima formă, deşi folosită şi acceptată în limbajul curent, va fi evitată în limbajul matematic pentru a nu permite utilizarea dublei negaţii cu rol de negaţie simplă, utilizare generatoare de posibile ambiguităţi.

b) Negaţia propoziţiei: "dreptele d şi e sînt paralele sau necoplanare" este "dreptele d şi e nu sînt paralele şi nu sînt necoplanare", ceea ce se reformulează: "dreptele d şi e nu sînt paralele şi sînt coplanare". Din axiomele geometriei deducem că "dreptele d şi e sînt concurente". Aceeaşi negaţie mai poate fi exprimată şi sub forma: "dreptele d şi e nu sînt paralele şi nici necoplanare".

c) Negaţia propoziţiei: "patrulaterul ABCD este romb şi are un unghi drept" este "patrulaterul ABCD nu este romb sau nu are un unghi drept " sau, echivalent: "patrulaterul ABCD nu este romb sau orice unghi al său nu este drept " sau încă: "patrulaterul ABCD nu este romb sau nu există un unghi al său care să fie drept ".

4.6 Definiţie. Implicaţia. Fie p, q propoziţii. Propoziţia $(\neg p) \vee q$ se scrie prescurtat $p \to q$ şi se citeşte „p implică q". Operatorul $\to$ se numeşte *implicaţie*. Insistăm:

$$p \to q \textit{ este o prescurtare pentru } (\neg p) \vee q.$$

Tabelul de adevăr pentru operatorul de implicaţie poate fi deci construit astfel:

p	q	$\neg p$	$(\neg p) \vee q = p \to q$
1	1	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	1

Deci $p \to q$ este o propoziţie, a cărei valoare de adevăr depinde de valorile de adevăr ale lui p şi q. Tabelul arată că $p \to q$ este falsă exact atunci cînd p este adevărată şi q este falsă.

Se justifică intuitiv că $p \to q$ este acelaşi lucru cu $(\neg p) \vee q$, astfel: $p \to q$ înseamnă "dacă p este adevărată, atunci q este adevărată". Altfel spus, sau p este falsă (adică are loc $\neg p$), sau p este adevărată şi atunci automat q este adevărată (adică are loc q); pe scurt, $(\neg p) \vee q$.

Implicaţia este un operator logic *extrem de important* în matematică.

Faptul că *propoziţia $p \to q$ este adevărată* se exprimă de obicei sub una din următoarele forme:

Dacă p, atunci q.

p este o condiţie suficientă pentru q.

Din p rezultă q.

q este o condiţie necesară pentru p.

(Are loc) q în ipoteza că (are loc) p.

În ipoteza p, are loc concluzia q.

q dacă p.

(Are loc) p numai dacă (are loc) q.

Este suficient ca (să aibă loc) p pentru ca (să aibă loc) q.

q este o consecinţă a lui p.

Faptul că $p \to q$ este acelaşi lucru din punct de vedere logic cu $(\neg p) \vee q$ este *foarte important şi util* cînd trebuie negată o implicaţie (lucru care intervine frecvent, de exemplu în cazul demonstraţiilor prin reducere la absurd).

4.7 Exemple. "Dacă plecăm într-un minut atunci vom ajunge la timp".

"Dacă ABC este un triunghi cu toate laturile congruente două cîte două, atunci unghiurile triunghiului ABC sînt congruente două cîte două".

Invităm cititorul să reformuleze în limbaj natural exemplele de mai sus, folosind toate variantele posibile. De pildă, "Dacă plecăm într-un minut atunci vom ajunge la timp" se mai poate exprima prin "Plecăm într-un minut implică faptul că vom ajunge la timp", "Este suficient să plecăm într-un minut pentru ca să ajungem la timp", "Vom ajunge la timp dacă plecăm într-un minut" etc.

4.8 Definiţie. Echivalenţa. Fie p, q propoziţii. Propoziţia $(p \to q) \wedge (q \to p)$ se scrie prescurtat $p \leftrightarrow q$ şi se citeşte „p echivalent q”. Operatorul $\leftrightarrow$ se numeşte *echivalenţă*. Deci:

$p \leftrightarrow q$ *este o prescurtare pentru* $(p \to q) \wedge (q \to p)$.

4.9 Exerciţiu. Fie p, q propoziţii. Cu ajutorul tabelelor de adevăr, demonstraţi că:

$p \leftrightarrow q$ *este adevărată exact atunci cînd* p *şi* q *au aceeaşi valoare de adevăr.*

Faptul că propoziţia $p \leftrightarrow q$ <u>este adevărată</u> se mai poate exprima prin frazele următoare:

p este o condiţie necesară şi suficientă pentru q.
p echivalent cu q.
(Are loc) p dacă şi numai dacă (are loc) q.
Condiţiile p şi q sînt echivalente.

Cînd întîlniţi enunţuri de tipul: „Să se demonstreze că afirmaţiile A şi B sînt echivalente”, aveţi de făcut *două demonstraţii*: demonstraţia A → B şi demonstraţia B → A.[9]

I.5. Calcul propoziţional

Fiind date două sau mai multe propoziţii p, q, r, ..., se pot forma diverse propoziţii noi folosind operatorii logici. De exemplu:

$$\neg(p\wedge q),\ \neg(\neg p),\ p\wedge(q\wedge r),\ (p\wedge q)\wedge r,\ (\neg p)\vee(\neg q)$$

Expresiile de mai sus se numesc *expresii propoziţionale*. Observăm, cu tabele de adevăr, că $\neg(p\wedge q)$ şi $(\neg p)\vee(\neg q)$ au aceeaşi valoare de adevăr[10], indiferent de ce valori de adevăr au p, q. Astfel de „identităţi logice” sînt importante şi este necesar să dăm mai întîi nişte definiţii.

5.1 Definiţie. Expresii propoziţionale. Considerăm trei mulţimi de simboluri:

- mulţimea V a *simbolurilor care notează propoziţii* („variabilele propoziţionale”) $V = \{p,q,r,...\}$[11] ;

- mulţimea O a *simbolurilor care notează operatori logici*, $O = \{\vee, \wedge, \neg\}$

- mulţimea A a *simbolurilor auxiliare*: paranteza stîngă "(" şi paranteza dreaptă ")": $A = \{(,)\}$

O *expresie propoziţională*, sau, pe scurt, expresie, este un şir de simboluri alese din mulţimile V, O sau A, construit după regulile de mai jos:

---

[9] Uneori este posibilă o demonstraţie de tipul $A \leftrightarrow A_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow B$.
[10] Demonstraţi!
[11] Presupunem că avem o mulţime suficient de mare de variabile propoziţionale.

(E1) orice variabilă propoziţională este o expresie;

(E2) dacă E şi F sînt expresii, atunci sînt expresii şirurile următoare:

$(E) \wedge (F)$ (citită „E şi F”);

$(E) \vee (F)$ (citită „E sau F”);

$\neg(E)$ (citită „non E”).

(E3) singurele expresii corecte sînt cele construite respectînd regulile (E1) şi (E2).

Pentru un plus de claritate, se admite folosirea, în afară de parantezele rotunde, şi a parantezelor pătrate [,] şi a acoladelor {, }, după regulile cunoscute.

Pentru simplitatea scrierii, ori de cîte ori nu apare pericol de confuzie, în loc de $(E) \wedge (F)$ vom scrie, mai simplu, $E \wedge F$. Aceeaşi observaţie se aplică pentru $(E) \vee (F)$ şi $\neg(E)$.

Vom conveni că operatorul $\neg$ acţionează numai asupra expresiei imediat următoare. De exemplu, $\neg\neg p$ reprezintă scrierea simplificată a $\neg(\neg p)$. Analog, $\neg p \vee q$ este scrierea simplificată a $(\neg p) \vee q$.

Se vor putea utiliza şi prescurtările $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$, cu sensul dat la definiţia lor. Mai precis, dacă E şi F sînt expresii, atunci $(E) \rightarrow (F)$ este expresie, prescurtare a $\neg(E) \vee (F)$; la fel, $(E) \leftrightarrow (F)$ este expresie, prescurtare a $((E) \rightarrow (F)) \wedge ((F) \rightarrow (E))$.

De exemplu, în conformitate cu cele precizate mai sus, dacă E şi F sînt expresii, atunci şirurile $(E \wedge F) \rightarrow \neg(E)$ şi $\neg(E \vee F)$ sînt expresii, în timp ce $(E \wedge F) \neg(E)$ şi $EF \rightarrow F$ nu sînt expresii.

5.2 Definiţie. Două expresii propoziţionale E şi F se numesc *echivalente logic* dacă, pentru orice valori de adevăr ale variabilelor propoziţionale care apar în E şi F, expresiile au aceeaşi valoare de adevăr. Notăm acest lucru prin $E \equiv F$.[12]

Observăm că *$E \equiv F$ este acelaşi lucru cu faptul că $E \leftrightarrow F$ este adevărată* (pentru orice valori de adevăr ale variabilelor propoziţionale care apar în E şi F).

5.3 Exemplu. Au loc[13] următoarele echivalenţe logice, pentru orice propoziţii p, q:

$$\neg(p\wedge q) \equiv (\neg p)\vee(\neg q)$$

$$\neg(p\vee q) \equiv (\neg p)\wedge(\neg q)$$

Acestea sînt exemple de *identităţi logice*. Aceste două identităţi logice se numesc *legile lui De Morgan*[14].

5.4 Exemplu. Au loc următoarele echivalenţe (demonstraţi-le cu ajutorul tabelelor de adevăr):

$p \rightarrow q \equiv (\neg p) \vee q$. Această echivalenţă nu este decît o transcriere a definiţiei implicaţiei.

---

[12] Notaţia $E = F$ este rezervată cazului cînd E şi F notează *aceeaşi* expresie, adică *E şi F* notează şiruri identice de simboluri.

[13] Demonstraţi!

[14] Augustus De Morgan (1806 – 1871), matematician britanic. A introdus termenul de "inducţie matematică".

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (distributivitatea lui $\wedge$ faţă de $\vee$).

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$).

$\neg(\neg p) \equiv p$ (legea negării negaţiei).

Pentru ilustrare, demonstrăm distributivitatea lui $\wedge$ faţă de $\vee$. Întrucît sînt 3 variabile propoziţionale, trebuie să avem 8 linii în tabel, corespunzătoare celor $8 = 2^3$ combinaţii ale valorilor de adevăr ale p, q, r:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Deoarece coloanele $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ şi $p \wedge (q \vee r)$ sînt identice, rezultă identitatea cerută.

5.5 Observaţie importantă. **Negarea implicaţiei.** Intuitiv, cînd spunem că $p \rightarrow q$ este falsă? Desigur, atunci cînd ipoteza p este adevărată şi totuşi concluzia q este falsă (adică are loc $p \wedge \neg q$). Aceasta este în acord cu următorul calcul propoziţional:

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg((\neg p) \vee q) \equiv (\neg\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q.$$

Am aplicat una din legile de negare ale lui De Morgan. Pentru importanţa sa, trebuie reţinută această *regulă de negare a implicaţiei* :

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q.$$

Observaţi că negarea implicaţiei *nu conţine vreo implicaţie!*

În general, concluziile bazate pe un calcul logic formal trebuie totdeauna interpretate intuitiv (conform bunului simţ). Acest fapt evită apariţia unor greşeli de calcul şi, totodată, este un proces absolut necesar în înţelegerea unor demonstraţii (sau în găsirea unor soluţii la o problemă dată).

5.6 Definiţie. Se numeşte *tautologie* o expresie care este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale variabilelor propoziţionale. Se numeşte *contradicţie* o expresie care este falsă, indiferent de valorile de adevăr ale variabilelor propoziţionale.

Astfel, dacă E, F sînt expresii, atunci: "$E \leftrightarrow F$ este o tautologie" este exact acelaşi lucru cu "$E \equiv F$". Orice echivalenţă $E \equiv F$ generează tautologia $E \leftrightarrow F$. Astfel, una din echivalenţele logice de la **5.4** se poate scrie: $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ este tautologie.

5.7 Notaţie. Fie p şi q propoziţii. Notaţia $p \Rightarrow q$ înseamnă "$p \rightarrow q$ este adevărată". Insistăm asupra acestei distincţii: $p \rightarrow q$ este o propoziţie (adevărată sau falsă, după caz), pe cînd $p \Rightarrow q$ înseamnă că $p \rightarrow q$ este adevărată.

Notaţia $p \Leftrightarrow q$ înseamnă "$p \leftrightarrow q$ este adevărată", adică sînt adevărate simultan implicaţiile $p \rightarrow q$ şi $q \rightarrow p$. De aceste lucruri trebuie să se ţină cont în redactarea demonstraţiilor sau în diverse enunţuri matematice: vom scrie $p \Rightarrow q$ doar în cazul în care $p \rightarrow q$ este adevărată. La fel, scriem $p \Leftrightarrow q$ doar cînd $p \Rightarrow q$ şi $q \Rightarrow p$ au loc simultan. O greşeală frecventă este folosirea abuzivă a notaţiei $\Leftrightarrow$, cînd ar trebui să se folosească $\Rightarrow$ (de exemplu în cursul rezolvării unor ecuaţii).

5.8 Exemplu. Pentru orice propoziţii p, q avem: $((p \rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că propoziţia $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale p, q. Examinînd definiţia operatorului $\rightarrow$, avem de arătat că, dacă $((p \rightarrow q) \wedge p)$ este adevărată, atunci q este adevărată.

Presupunînd deci $((p \rightarrow q) \wedge p)$ adevărată, rezultă din tabela de adevăr pentru $\wedge$ că p este adevărată şi $p \rightarrow q$ adevărată. Dar $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, deci $p \wedge (\neg p \vee q)$ este adevărată. Folosind distributivitatea, deducem că $p \wedge (\neg p \vee q) \equiv (p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)$ este adevărată. Cum $p \wedge \neg p$ este întotdeauna falsă (este o contradicţie), $(p \wedge q)$ trebuie să fie adevărată, deci q este adevărată.

Mai există două variante de demonstraţie: folosind tabele de adevăr sau folosind calculul propoziţional. Lăsăm în seama cititorului demonstraţia bazată pe tabelele de adevăr. Exemplificăm metoda *calculului propoziţional* (care necesită cunoaşterea unor formule din calculul cu propoziţii). Folosind definiţia implicaţiei ($p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$), avem:

$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q \equiv \neg ((p \rightarrow q) \wedge p) \vee q \equiv \neg ((\neg p \vee q) \wedge p) \vee q \equiv$

$(\neg (\neg p \vee q) \vee \neg p) \vee q \equiv ((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg p) \vee q \equiv$

$((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee q$

Dar $p \vee \neg p$ este totdeauna adevărată, deci $(p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p) \equiv \neg q \vee \neg p$.

Continuăm:

$((p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee q \equiv (\neg q \vee \neg p) \vee q \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee q \equiv \neg p \vee (\neg q \vee q)$

Am folosit că disjuncţia este asociativă şi comutativă. Această propoziţie este o tautologie (căci $\neg q \vee q$ este tautologie). □

Următoarea propoziţie colectează o serie de tautologii, dintre care unele sunt folosite în raţionamente şi au primit nume distinctive. Cîteva au mai fost întîlnite în text, sub forma unor echivalenţe logice. Invităm cititorul să demonstreze cîteva dintre ele (măcar (6), (7), (13), (19), (23), (24), (25)), folosind una din metodele descrise mai sus.

5.9 Propoziţie. *Fie p, q, r variabile propoziţionale. Au loc următoarele tautologii:*

1) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$ (Comutativitatea disjuncţiei).

2) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$ (Comutativitatea conjuncţiei).

3) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$ (Asociativitatea disjuncţiei).

4) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$ (Asociativitatea conjuncţiei).

5) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (Distributivitatea lui $\wedge$ faţă de $\vee$).

6) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$ (Distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$).

7) $[\neg(p \vee q)] \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$; $[\neg(p \wedge q)] \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (Legile lui De Morgan sau legile de dualitate).

8) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)]$

9) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

10) $(p \leftrightarrow q) \to (p \to q)$

11) $p \leftrightarrow p$

12) $\neg (p \wedge \neg p)$

13) $(p \wedge \neg p) \to q$ (Pornind de la o contradicţie, deducem că orice este adevărat).[15]

14) $\neg(\neg p) \leftrightarrow p$ (Legea dublei negaţii).

15) $p \vee \neg p$ (Legea terţului exclus).

16) $(p \wedge p) \leftrightarrow p$

17) $(p \vee p) \leftrightarrow p$

18) $p \to (q \to p)$ (Dacă p este adevărată, atunci p este adevărată în orice ipoteză).

19) $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \to r]$

20) $(\neg p) \to (p \to q)$

21) $(p \to q) \vee (q \to p)$

22) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

23) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ (Principiul de demonstraţie prin contrapoziţie[16]: pentru a demonstra q în ipoteza p, presupunem că q este falsă şi demonstrăm $\neg p$.)

24) $(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to (r \wedge \neg r)]$ (Principiul de demonstraţie prin reducere la absurd: pentru a demonstra că $p \Rightarrow q$, se presupune că are loc p şi totuşi q este falsă. De aici se deduce o contradicţie: $(r \wedge \neg r)$.)

25) $[p \to (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to r]$ (Pentru a demonstra că p implică o concluzie de forma $q \vee r$, se presupun adevărate p şi $\neg q$ şi se demonstrează r.)

26) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ (Tranzitivitatea implicaţiei, cunoscută sub numele de regula silogismului)

27) $\neg(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ (Regula de negare a implicaţiei). □

[15] Este deci esenţial ca o teorie matematică să nu conţină contradicţii: dacă orice afirmaţie este adevărată, atunci cercetarea adevărului este inutilă...

[16] Uneori acest principiu de demonstraţie este numit tot "prin reducere la absurd".

Exerciţii

1. Fie propoziţiile: p = "în ΔABC, $m(\widehat{A}) = \pi/2$", q = "în ΔABC, $m(\widehat{B}) = \pi/4$" şi r = "în ΔABC, $m(\widehat{C}) = \pi/4$". Scrieţi expresiile logice corespunzătoare enunţurilor:

(1) Dacă în ΔABC $m(\widehat{A}) = \pi/2$ şi $m(\widehat{B}) = \pi/4$, atunci $m(\widehat{C}) = \pi/4$.

(2) Dacă în ΔABC $m(\widehat{C}) = \pi/4$ şi $m(\widehat{B}) = \pi/4$, atunci $m(\widehat{A}) = \pi/2$.

Traduceţi în limbaj natural următoarele propoziţii:

(3) $(r \wedge q) \rightarrow p$

(4) $(r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$.

2. Fie propoziţiile p: "Ana are mere", q: "Ana este blondă" şi r: "Ana cîntă frumos." Traduceţi în limbaj natural următoarele propoziţii:

(1) $q \rightarrow r$

(2) $p \wedge q$

(3) $\neg q$

(4) $\neg (p \vee q)$

(5) $(\neg p) \vee (\neg q)$

(6) $(r \wedge q) \rightarrow p$

(7) $(r \wedge q) \vee p$

(8) $r \wedge (q \vee p)$

(9) $r \leftrightarrow (p \wedge q)$

(10) $(r \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p)$

(11) $r \rightarrow (q \wedge p)$

(12) $(p \wedge (\neg q)) \leftrightarrow (r \vee (\neg p))$

Scrieţi expresiile logice corespunzătoare enunţurilor:

(13) Ana nu este blondă, dar cîntă frumos.

(14) Ana nu are mere, şi nu este blondă sau cîntă frumos.

(15) Ana nu are mere şi nu este blondă, sau cîntă frumos.

(16) Nu este adevărat că Ana este blondă sau are mere.

(17) Nu este adevărat că Ana este blondă, sau are mere.

(18) Ana are mere şi este blondă, sau are mere şi cîntă urît.

(19) Dacă Ana are mere şi este blondă, atunci ea cîntă frumos.

(20) O condiţie necesară ca Ana să cînte frumos este să fie blondă.

(21) O condiţie suficientă ca Ana să cînte frumos este să fie blondă.

(22) Chiar dacă Ana cîntă frumos, nu are mere.

(23) Ana are mere dacă este blondă, şi nu cîntă urît dacă are mere.

3. Fie p, q, r propoziţii. Să se demonstreze că:

(1) $p \Rightarrow p \vee q$

(2) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

(3) $\neg (p \to q) \Rightarrow p$

(4) $(p \to q) \wedge (p \to \neg q) \Rightarrow \neg p$

(5) $(p \to (q \to r)) \equiv (p \wedge q) \to r$

(6) $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$

(7) $(p \vee q) \to r \Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$.

4. Formulaţi negaţia fiecăreia dintre propoziţiile:

(1) Patrulaterul $ABCD$ este romb şi are aria de 2m^2.

(2) Numărul 8 este par şi $x^8 = 2$.

(3) Raza sferei este din $[1, 3]$ şi baza conului este pe sferă

(4) Ecuaţia $x^2 + 2x = 0$, cu $x \in \mathbb{N}$, are soluţia $x = 0$ şi soluţia $x = -2$.

(5) Funcţia f este pozitivă pe $(0, 1)$ şi se anulează în $x = 0$ şi $x = 1$.

(6) Patrulaterul $ABCD$ este pătrat sau romb.

(7) Funcţia exponenţială este strict crescătoare sau strict descrescătoare.

(8) Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător sau monoton descrescător.

(9) Funcţia f este continuă şi monotonă.

(10) $\widehat{ABC}$ este drept sau $\widehat{BCA}$ este drept.

I.6. Predicate

Să considerăm următoarele propoziţii:

- $2 \cdot 2 + 1 > 0$
- $2 \cdot 3 + 1 > 0$
- $2 \cdot (-2) + 1 > 0$.

Observăm că toate cele trei propoziţii de mai sus sunt de forma $2 \cdot x + 1 > 0$, unde x este un număr din $\mathbb{Z}$. Acesta este un exemplu de „propoziţie depinzînd de un parametru” care, în terminologia consacrată, poartă numele de *predicat de o variabilă* (în exemplul nostru, e un predicat de o variabilă, variabilă care este număr întreg).

Formal, definiţia noţiunii de predicat este următoarea: un *predicat* este o funcţie definită pe o mulţime (sau o clasă[17]) Γ, unde se găseşte variabila, cu valori în mulţimea P a propoziţiilor. Deci un predicat de o variabilă este o funcţie $p : \Gamma \to \mathrm{P}$. Subliniem că, dacă $p : \Gamma \to \mathrm{P}$ este un predicat şi $b \in \Gamma$, atunci $p(b)$ este o propoziţie şi nu un predicat.

[17] O *clasă* este o colecţie "foarte mare" de obiecte, care nu este o mulţime. De exemplu, nu se poate vorbi de "mulţimea tuturor mulţimilor", ci de "clasa tuturor mulţimilor".

Analog, se poate vorbi despre predicate de mai multe variabile. De exemplu,

$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2,\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

este un predicat de două variabile.

Pentru orice predicat trebuie precizată clar mulţimea în care se pot „mişca" variabilele. Se admite omiterea scrierii acestei mulţimi doar dacă aceasta este clară din context. Astfel, „$x^2 + 1 = 0$" *nu este un predicat*. În schimb,

$$p : x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$$
$$q : x^2 + 1 = 0,\ x \in \mathbb{C}$$

sînt predicate (distincte!). Uneori se scot în evidenţă variabilele, adică se scrie $p(x)$ în loc de p. Observăm că p este predicat cu proprietatea că înlocuind variabila x cu orice valoare posibilă (adică orice număr real), se obţin doar propoziţii false. În schimb, $q(i)$ şi $q(-i)$ sînt adevărate! $q(a)$ este o propoziţie falsă, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, $a \neq i$ sau $a \neq -i$.

Ultimele două predicate sînt exemple de *ecuaţii*. O *ecuaţie* este un predicat de tipul

$$f(x) = g(x),\ x \in A$$

unde A este o mulţime şi $f,\ g : A \to B$ sînt două funcţii definite pe A cu valori într-o aceeaşi mulţime B. Care sînt funcţiile $f,\ g$ şi mulţimile $A,\ B$ pentru predicatele $p(x)$, respectiv $q(x)$? Mai daţi 2 exemple de ecuaţii şi arătaţi că se încadrează în definiţia generală de mai sus.

O *soluţie* a ecuaţiei „$f(x) = g(x),\ x \in A$" este un element $a \in A$ pentru care egalitatea este satisfăcută, adică $f(a) = g(a)$ este adevărată. A *rezolva o ecuaţie* înseamnă a găsi mulţimea tuturor soluţiilor ei. Care este mulţimea soluţiilor ecuaţiei p? Dar a ecuaţiei q?

Prin tradiţie, variabila dintr-o ecuaţie se numeşte *necunoscută.*

6.1 Exemple. a) Ecuaţia $y'(t) = 2y(t),\ \ y \in \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcţie derivabilă}\}$ este un exemplu de *ecuaţie diferenţială*, cu necunoscuta o funcţie $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivabilă. O soluţie a acestei ecuaţii este funcţia $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(t) = e^{2t}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Verificaţi!

b) În ecuaţia

$$2x + 3y = 12,\ (x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

necunoscuta este o pereche $(x,\ y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.[18] Adesea, o ecuaţie de acest tip se mai scrie

$$2x + 3y = 12,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$$

şi se spune că este o *ecuaţie cu două necunoscute $x,\ y \in \mathbb{Z}$*. Verificaţi că (0, 4) şi (-3, 6) sînt soluţii.

Pornind de la un predicat de o variabilă $p(x)$, $x \in \Gamma$, putem forma următoarele două propoziţii:

[18] Ecuaţiile în care necunoscutele sînt numere întregi se numesc *ecuaţii diofantice*, de la *Diofant din Alexandria*, matematician grec care a trăit in sec III AD, considerat întemeietorul Algebrei.

U : Pentru orice $x \in \Gamma$, $p(x)$ este adevărată.

E : Există $x \in \Gamma$ astfel încît $p(x)$ este adevărată.

Subliniem că *U şi E sînt propoziţii şi nu predicate.*

Pentru simplificarea scrierii, introducem două simboluri corespunzătoare celor două tipuri de propoziţii de mai sus:

- simbolul $\forall$, citit "pentru orice", sau "oricare ar fi", sau încă "pentru toţi (toate)" şi pe care îl vom numi *cuantificator universal*. Cu ajutorul lui, propoziţia: "Pentru orice $x \in \Gamma$, $p(x)$ este adevărată" se rescrie, (fără a se mai specifica "este adevărată"), sub forma:

$$(\forall x \in \Gamma)p(x)$$

Scrierea $(\forall x \in \Gamma)p(x)$ poate fi interpretată ca o "conjuncţie extinsă" a tuturor propoziţiilor $p(x)$ după $x \in \Gamma$, mai precis: $(\forall x \in \Gamma)p(x) = \bigwedge_{x \in \Gamma} p(x)$.

Într-adevăr, dacă $\Gamma = \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci $(\forall x \in \Gamma)p(x)$ are aceeaşi valoare de adevăr cu $p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge p(n) = \bigwedge_{i=1}^{n} p(i)$

- simbolul $\exists$, *cuantificatorul existenţial*, care se citeşte "există un/o", "măcar pentru un/o are loc", "cel puţin pentru un/o are loc". Cu ajutorul lui, propoziţia "Există $x \in \Gamma$ astfel încît $p(x)$ este adevărată" se rescrie

$$(\exists x \in \Gamma)p(x)$$

$(\exists x \in \Gamma)p(x)$ poate fi interpretată ca o "disjuncţie extinsă" a tuturor propoziţiilor $p(x)$ după $x \in \Gamma$, mai precis: $(\forall x \in \Gamma)p(x) = \bigvee_{x \in \Gamma} p(x)$. Într-adevăr, dacă $\Gamma = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, atunci $(\exists x \in \Gamma)\, p(x)$ are aceeaşi valoare de adevăr cu $p(1) \vee p(2) \vee \cdots \vee p(n)$.

În concluzie, pornind de la un *predicat de o variabilă*, $p(x)$ cu x din Γ, putem obţine *două propoziţii* utilizînd cuantificatorii:

$$U\!: (\forall x \in \Gamma)p(x)$$

$$E : (\exists x \in \Gamma)p(x).$$

Se spune că U şi E s-au obţinut din predicatul $p(x)$ cu x din Γ prin *legarea variabilei x*.

Astfel, luînd predicatul $2 \cdot x + 1 > 0$, $x \in \mathbb{Z}$, se obţin propoziţiile

$$(\forall x \in \mathbb{Z})\ (2 \cdot x + 1 > 0) \text{ (falsă)}$$

$$(\exists x \in \mathbb{Z})\ (2 \cdot x + 1 > 0) \text{ (adevărată)}$$

Variabila x are roluri diferite în predicatul "$p(x)$, $x \in \Gamma$" şi respectiv în propoziţia $(\forall x \in \Gamma)p(x)$. În primul caz, x este o *variabilă liberă*, în sensul că x poate lua valori arbitrare în Γ, obţinîndu-se diverse propoziţii, adevărate sau false. În cel de-al doilea caz, propoziţia $(\forall x \in \Gamma)p(x)$ are o valoare de adevăr bine determinată, independentă de variabila x; se spune că variabila x este *variabilă legată*. Consideraţii similare au loc şi pentru cuplul: predicatul "$p(x)$, $x \in \Gamma$" şi propoziţia $(\exists x \in \Gamma)p(x)$: variabila x este legată în propoziţia $(\exists x \in \Gamma)p(x)$.

Într-o propoziţie nu există variabile libere; ori nu are variabile, ori toate sînt legate!

În sfîrşit, subliniem că *numele* variabilei, liberă sau legată, nu are nici o importanţă. Mai precis, propoziţia $(\forall x \in \Gamma)p(x)$ este exact acelaşi lucru cu propoziţia $(\forall y \in \Gamma)p(y)$. Atenţie, *nu* e acelaşi lucru cu $(\forall y \in \Gamma)p(x)$ (care nu e nici măcar propoziţie, pentru că variabila x e liberă!). Cu alte cuvinte, schimbarea numelui unei variabile trebuie să fie făcută *peste tot unde apare aceasta* (cu un nume diferit de numele celorlalte variabile care apar în predicat sau propoziţie).

În cazul în care Γ este subînţeleasă din context şi nu există pericol de confuzie, în loc de $(\forall x \in \Gamma)p(x)$ se poate scrie $(\forall x)p(x)$. Analog, în loc de $(\exists x \in \Gamma)p(x)$ se poate scrie $(\exists x)p(x)$.

Reguli de negaţie

Au loc următoarele reguli de negaţie pentru cuantificatori (a se compara cu legile lui DeMorgan):

$$\neg((\forall x)p(x)) \equiv (\exists x)(\neg p(x)); \qquad \neg((\exists x)p(x)) \equiv (\forall x)(\neg p(x))$$

6.1 Exemple. a) Negaţia propoziţiei: “există un număr natural n astfel încît $n - n^2 > 1$” este: “pentru orice număr natural n avem $n - n^2 \leq 1$”.

b) Negaţia propoziţiei: “pentru orice număr real a are loc $a^4 > 0$” este: “există un număr real a astfel încît $a^4 \leq 0$ ”.

6.2 Exemplu. Pornind de la un predicat de două variabile $P(x, y)$, se pot lega variabilele în mai multe moduri cu ajutorul cuantificatorilor $\forall$ şi $\exists$. Fie, de exemplu $P(x, y)$: “$x \in y$”, unde x şi y sînt mulţimi. Se pot forma predicatele de o variabilă şi apoi propoziţiile următoare:

1) Legînd pe x cu ajutorul lui $\forall$, obţinem $(\forall x)(x \in y) =: Q(y)$ (predicat cu variabila liberă y), tradus "orice mulţime aparţine lui y".

   Legînd apoi pe y cu $\forall$, obţinem $(\forall y)(Q(y)) = (\forall y)(\forall x)(x \in y)$, o propoziţie care spune că în orice pereche de mulţimi, prima e element al celei de a doua. E falsă.

   Dacă legăm pe y cu $\exists$, obţinem $(\exists y)(Q(y)) = (\exists y)(\forall x)(x \in y)$, propoziţie care înseamnă că există o mulţime care conţine orice mulţime ca element. Vom vedea că e falsă.

2) Legînd pe y cu $\forall$, obţinem $(\forall y)(x \in y) =: R(x)$ (predicat cu variabila liberă x). Cum se traduce?

   Legînd apoi pe x cu $\forall$, obţinem $(\forall x)(R(x)) = (\forall x)(\forall y)(x \in y)$, o propoziţie falsă (de ce?). Observăm că $(\forall x)(\forall y)(x \in y) \equiv (\forall y)(\forall x)(x \in y)$.

   Dacă legăm pe x cu $\exists$, obţinem $(\exists x)(R(x)) = (\exists x)(\forall y)(x \in y)$, propoziţie falsă (de ce?)

3) Legînd pe x cu $\exists$, obţinem $S(y) = (\exists x)(x \in y)$ (predicat cu variabila liberă y, care se poate traduce "mulţimea y este nevidă".

   Legînd apoi pe y cu $\forall$, obţinem $(\forall y)(S(y)) = (\forall y)(\exists x)(x \in y)$. Cum se traduce această propoziţie? Ce valoare de adevăr are?

   Dacă legăm pe y cu $\exists$, obţinem $(\exists y)(S(y)) = (\exists y)(\exists x)(x \in y)$. Cum se traduce această propoziţie? Ce valoare de adevăr are?

4) Legînd pe y cu $\exists$, obţinem $T(x) = (\exists y)(x \in y)$ (predicat cu variabila liberă x, care se poate traduce "există o mulţime căreia x îi aparţine".

Legînd apoi pe x cu $\forall$, obţinem $(\forall x)(T(x)) = (\forall x)(\exists y)(x \in y)$, o propoziţie adevărată. De ce? Observăm că $(\forall x)(\exists y)(x \in y)$ *nu este acelaşi lucru cu* $(\exists y)(\forall x)(x \in y)$.

Dacă legăm pe x cu $\exists$, obţinem $(\exists x)(T(x)) = (\exists x)(\exists y)(x \in y)$, propoziţie adevărată, care este acelaşi lucru cu $(\exists y)(\exists x)(x \in y)$.

6.3 Exerciţiu. Reluaţi construcţiile şi interpretările de la la exemplul precedent, pornind de la predicatele următoare: a) „x are nota y”, unde x este student în anul I, $y \in \{1,2, \ldots, 10\}$; b) „$x$ divide y”, unde $x, y \in \mathbb{N}$.

6.4 Exerciţiu. Pentru orice propoziţie p şi orice predicat $q(x)$, $x \in \Gamma$ au loc identităţile:

$$p \wedge ((\exists x)q(x)) \equiv ((\exists x)(p \wedge q(x)); \qquad p \vee ((\forall x)q(x)) \equiv ((\forall x)(p \vee q(x))$$

Comparaţi cu proprietăţile de distributivitate ale lui $\wedge$ faţă de $\vee$ (şi invers).

6.5 Observaţie. Se foloseşte foarte des în matematică simbolul $\exists!$ (citit *există şi este unic*). Fie $P(x)$ predicat cu o variabilă. Expresia $(\exists! x)P(x)$ înseamnă că *există şi este unic un x cu proprietatea $P(x)$*. Din punct de vedere formal, definiţia este următoarea:

$(\exists! x)P(x)$ este o prescurtare pentru $((\exists x)P(x)) \wedge ((\forall y)(\forall z)((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z))$.

Proprietatea $(\forall y)(\forall z)((P(y) \wedge P(z)) \rightarrow y = z)$ se mai exprimă „există *cel mult* un x astfel încît $P(x)$ să fie adevărată”.

În definiţia formală de mai sus, s-a exprimat faptul că x este unic punînd condiţia ca, de îndată ce y *şi* z satisfac P, să rezulte că $y = z$. Aceasta este şi o metodă de demonstrare a unicităţii în diverse situaţii.

De exemplu, $(\exists! x \in \mathbb{R})(x > 0 \wedge x^2 = 2)$ exprimă faptul că există un unic număr real pozitiv al cărui pătrat este 2. Aceasta este chiar definiţia lui $\sqrt{2}$.

Exerciţii

1. Se consideră următoarele predicate (se presupune că variabilele iau valori în mulţimea oamenilor):

$B(x)$ = “x este un bărbat”

$F(x)$ = “x este o femeie”

$x\mathrm{T}y$ = “x este mai tînăr decît y”

$x\mathrm{C}y$ = “x este copilul lui y”

$x\mathrm{M}y$ = “x este căsătorit cu y”

$I(x)$ = “x locuieşte la Iaşi”

$D(x)$ = "x locuieşte la Dej"

Folosind notaţiile de mai sus, să se scrie expresiile în limbaj formal pentru următoarele propoziţii sau predicate:

(1) Fiecare are un tată şi o mamă.
(2) x este căsătorit.
(3) Fiecare este mai tînăr decît părinţii săi.
(4) Fiecare este mai tînăr decît bunicii săi.
(5) Oricine care are un tată, are şi o mamă.
(6) Există un om cu o noră mai în vîrstă decît el.
(7) x şi y sînt fraţi (în sensul şi de mamă şi de tată).
(8) Dacă există o femeie la Iaşi cu un frate la Dej, atunci există un bărbat la Dej cu o soră la Iaşi.
(9) Un bărbat căsătorit poate să nu locuiască la Iaşi.
(10) Toţi copiii lui x sunt căsătoriţi.
(11) Există cineva ai cărui copii sînt toţi căsătoriţi.
(12) Fiecare copil al lui x este căsătorit cu un copil al lui y.
(13) Există un copil al lui x care nu este căsătorit cu un copil al lui y.
(14) Există două persoane astfel încît fiecare copil al uneia dintre ele este căsătorit cu un copil al celeilalte.
(15) x şi y sînt veri.

Să se traducă în limbaj natural:

(16) $\forall x \forall y\, [(x\mathrm{M}y \wedge B(x)) \rightarrow F(y)]$.
(17) $\exists x \exists y [B(x) \wedge F(y) \wedge x\mathrm{M}y \wedge \forall z\, (z\mathrm{C}y \rightarrow \neg (z\mathrm{C}x))]$.
(18) $\exists y\, (F(y) \wedge x\mathrm{M}y) \wedge \exists z(F(z) \wedge y\mathrm{C}z) \wedge z\mathrm{T}x$.

2. Să se reformuleze propoziţiile sau predicatele de mai jos în limbaj matematic (LM) utilizînd cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$ şi operatorii logici; să se formuleze negaţiile lor în limbaj matematic (N LM) şi apoi să se formuleze negaţiile găsite în limbajul natural (N LN).

(1) Există $a \in A$ astfel încît $f(a) = b$. (Ecuaţia $f(x) = b$ are soluţia $a \in A$.)
(2) Pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ astfel încît $f(x) = y$. (O funcţie $f : A \rightarrow B$ cu această proprietate se numeşte surjectivă.)
(3) Pentru orice $x, y \in A$, cu $x \neq y$, avem $f(x) \neq f(y)$. (O funcţie $f : A \rightarrow B$ cu proprietatea enunţată se numeşte injectivă.)
(4) Există $M \in \mathbb{R}$ astfel încît, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq M$. (O funcţie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea enunţată se numeşte mărginită superior pe A, iar un număr $M \in \mathbb{R}$ ca mai sus se numeşte o margine superioară pentru f pe mulţimea A.)
(5) Există $m \in \mathbb{R}$ astfel încît, pentru orice $x \in A$, $f(x) \geq m$. (O funcţie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea enunţată se numeşte mărginită inferior pe A, iar un număr $m \in \mathbb{R}$ ca mai sus se numeşte o margine inferioară pentru f pe mulţimea A.)

(6) Există $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, astfel încît, pentru orice $x \in A$, $f(x) \le |M|$. (O funcţie $f : A \to \mathbb{R}$ cu proprietatea enunţată se numeşte mărginită pe A).

(7) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $r > 0$ şi $M > 0$ astfel încît, pentru orice $y \in (x - r, x + r)$, $|f(y)| \le M$. (O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea enunţată se numeşte local mărginită pe A.)

(8) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n > k(\varepsilon)$, avem $|a_n - a| < \varepsilon$. (Definiţia faptului că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are limita a, fapt scris $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$)

(9) Există un număr real a astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. (Definiţia faptului că şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent).

(10) Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ avem $a_n \le a_{n+1}$. (Un şir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea aceasta se numeşte monoton crescător.)

(11) Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încît, pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > k(\varepsilon)$, avem $|a_n - a_m| < \varepsilon$. (Un şir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea de mai sus se numeşte şir Cauchy sau şir fundamental.)

(12) În orice triunghi există măcar două unghiuri ascuţite.

(13) O matrice este inversabilă dacă şi numai dacă are determinantul nenul.

3. Fie ***P*** un plan. Notăm punctele din plan cu litere mari (*A, B, C, D, ...*), iar dreptele din plan cu litere mici (*a, b, c, d, ...*). Faptul că punctul A se află pe dreapta d se notează $A \in d$. Să se reformuleze propoziţiile sau predicatele de mai jos folosind aceste notaţii. Formulaţi negaţiile lor în limbaj matematic (N LM) şi apoi să se formuleze negaţiile găsite în limbajul natural (N LN):

Exemplu: "Pentru orice dreaptă, există un punct care nu-i aparţine.": $(\forall d)(\exists P)(P \notin d)$. NLM: $(\exists d)(\forall P)(P \in d)$; NLN: Există o dreaptă care conţine toate punctele.

(1) Dreptele a şi b sînt paralele.

(2) Dreptele a şi b sînt concurente.

(3) Orice dreaptă conţine cel puţin două puncte.

(4) Prin orice două puncte trece cel puţin o dreaptă.

(5) Prin orice două puncte distincte trece exact o dreaptă.

(6) Prin orice punct care nu se găseşte pe o dreaptă dată trece o dreaptă şi numai una paralelă cu dreapta dată.

(7) Există trei puncte necoliniare.

I.7. Teoreme. Demonstraţii

În matematică ne întîlnim cu *definiţii, exemple, contraexemple, teoreme, axiome, propoziţii, corolare, leme, demonstraţii.*

Definiţiile au fost deja studiate.

7.1 Definiţie. Fiind dată o definiţie, un *exemplu* (pentru acea definiţie) este un obiect concret (din genul proxim) care satisface definiţia.

7.2 Exemplu. Fie definiţia "se numeşte *număr prim* un număr natural care este diferit de 0 şi 1 şi care are doar doi divizori (1 şi numărul însuşi)". Numărul 2 este un exemplu de număr prim (pentru că 2 este un număr natural care satisface definiţia).

Numărul 4 este un *contraexemplu* pentru această definiţie (adică 4 nu este număr prim). Numărul 0,23 nu este un contraexemplu pentru această definiţie.

Cum s-ar defini în general noţiunea de contraexemplu pentru o definiţie dată?

7.3 Definiţie. O *axiomă* este o <u>propoziţie adevărată</u> care este acceptată drept adevărată, fără demonstraţie. O *teoremă* este (din punct de vedere logic) o <u>propoziţie adevărată</u>, dar al cărei adevăr trebuie demonstrat (adică o teoremă nu este o axiomă).

Desigur, teoremele sînt propoziţii adevărate "cu un conţinut matematic". O teoremă descrie legături între noţiuni matematice (care pot fi *noţiuni primare* - care nu se definesc-, sau noţiuni definite). În cadrul teoriei axiomatice a mulţimilor vom putea da o definiţie riguroasă a noţiunii de teoremă.

Din punct de vedere intuitiv, o teoremă asigură că: dacă anumite fapte (care formează *ipoteza teoremei*) sînt adevărate, atunci alte fapte (*concluzia teoremei*) trebuie să fie adevărate.

7.4 Exemplu. "*Prin orice două puncte distincte trece o dreaptă şi numai una*" este o axiomă a geometriei euclidiene (în axiomatizarea lui Hilbert). "*În orice triunghi medianele sînt concurente*" este o teoremă.[19] Daţi încă două exemple de axiome şi 4 exemple de teoreme. Formulaţi-le în limbaj matematic.

7.5 Observaţie. O formulare des întîlnită a teoremei de mai sus este "*Medianele unui triunghi sînt concurente*", sau "*Într-un triunghi, medianele sînt concurente*". Desigur, sensul este "*Medianele <u>oricărui</u> triunghi sînt concurente*".

Ipoteza teoremei este "*ABC este triunghi*", iar concluzia este "*medianele triunghiului ABC sînt concurente*".

---

[19] Teoremele, propoziţiile, lemele, corolarele se scriu în textele matematice în *italice*.

Practic, dacă vrem să demonstrăm (sau să înţelegem mai bine) teorema, trebuie să o enunţăm în *limbaj formal* (matematic):

$(\forall A, B, C$ puncte necoliniare$)(\forall M, N, P$ puncte$)[(M \in AB \wedge MA = MB \wedge N \in BC \wedge NB = NC \wedge P \in CA \wedge PC = PA) \Rightarrow (\exists! O)\ (AN \cap BP \cap CM = \{O\})]$.[20]

În această scriere, ipoteza este :

(A, B, C *sînt puncte necoliniare*) şi (M, N, P *sînt puncte*) şi $(M \in AB \wedge MA = MB \wedge N \in BC \wedge NB = NC \wedge P \in CA \wedge PC = PA)$

Concluzia:

$(\exists! O)\ (AN \cap BP \cap CM = \{O\})$

De multe ori, ca mai sus, ipotezele și concluzia conțin variabile libere. Aceste variabile pot reprezenta *orice* elemente ale universului discursului (în cazul de mai sus, orice puncte în plan). Desigur, în enunţul în limbaj formal, aceste variabile apar legate cu cuantificatorul universal $\forall$. O atribuire de valori particulare acestor variabile, astfel încît ipotezele să devină adevărate, se numește o *instanță* a teoremei. Pentru ca teorema să fie corectă, pentru fiecare astfel de atribuire, concluzia trebuie să fie, de asemenea, adevărată.

Dacă există măcar un caz în care ipotezele sînt satisfăcute, dar concluzia este falsă, atunci "teorema" este incorectă. Un astfel de caz este numit *contraexemplu* al "teoremei".

Teoremele trebuie demonstrate, pe baza axiomelor, a definiţiilor obiectelor care apar în enunţul teoremelor şi eventual folosind alte teoreme demonstrate anterior. Desigur, în demonstraţiile teoremelor se admit doar raţionamente riguroase, bazate pe regulile logicii.

Unele teoreme mai puţin importante se numesc *propoziţii*. O teoremă ajutătoare, folosită în demonstrarea unei teoreme mai importante, se numeşte *lemă*. O teoremă care este o consecinţă imediată a unei alte teoreme T se numeşte *corolar* al teoremei T.[21]

7.6 Exerciţiu. Să se reformuleze următoarele teoreme şi să se identifice la fiecare ipoteza şi concluzia, ca în exemplul următor: [22]

"*Dat numărul real* x, $x > 0$, *există un unic număr real* y *astfel încît* $e^y = x$."

Reformulare riguroasă în limbaj natural:

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, *există un unic număr real* y *astfel încît* $e^y = x$;

Reformulare în limbaj formal:

$(\forall x \in \mathbb{R})[x > 0 \Rightarrow ((\exists! y \in \mathbb{R})(e^y = x))]$ sau, detaliind $\exists!$:

$(\forall x \in \mathbb{R})[x > 0 \Rightarrow ((\exists y \in \mathbb{R})(e^y = x) \wedge (\forall z, t \in \mathbb{R})(e^z = e^t = x \Rightarrow z = t)]$

---

[20] Observaţi că este necesară uneori introducerea de notaţii care nu există în enunţul în limbaj natural. De asemenea, trebuie identificată *implicaţia* în enunţul teoremei. Implicaţia separă ipoteza de concluzie.

[21] Desigur, calificarea unei propoziţii drept mai importantă sau mai puţin importantă este un proces subiectiv. De aceea, unele "teoreme" dintr-o carte pot fi întîlnite drept "propoziţii" în altele. De multe ori, unele "leme" au devenit "teoreme" ulterior, după ce li s-a recunoscut importanţa.

[22] Nu uitaţi că, în scrierea formală, o teoremă trebuie să fie o propoziţie, adică nu are variabile libere!

Ipoteza: $x \in \mathbb{R} \wedge x > 0$

Concluzia: $(\exists y \in \mathbb{R})(e^y = x) \wedge (\forall z, t \in \mathbb{R})(e^z = e^t = x \Rightarrow z = t)$

a) *Dacă un număr prim divide un produs, atunci divide unul din factori.*

b) *Dacă dreptele a şi b sînt paralele şi dreapta c este perpendiculară pe a, atunci c este perpendiculară pe b.*

c) *Nu există un cel mai mare număr prim.*

d) *O paralelă dusă la una din laturile unui triunghi determină pe celelalte două laturi segmente proporţionale.*

e) *Aria sferei de rază* $r > 0$ *este* $4\pi r^2$.

f) *Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sînt congruente.*

g) *Limita unui şir de numere reale convergent este unică.*

h) *Un şir de numere reale monoton şi mărginit este convergent.*

Dacă se găseşte un contraexemplu pentru o teoremă, atunci sigur teorema este incorectă. Singurul mod de a ști cu siguranță că o teoremă este corectă este să o *demonstrăm*. O *demonstraţie* a teoremei este un argument deductiv care porneşte de la ipotezele teoremei și a căror concluzie este concluzia teoremei.

În cursul unei demonstraţii, *nicio afirmaţie nu trebuie făcută decît dacă poate fi justificată riguros, folosind ipotezele sau alte fapte (sau teoreme) deja demonstrate.*

Ilustrăm aceste idei cu nişte exemple simple. Se presupun cunoscute conceptele de număr natural şi număr întreg. Mulţimea numerelor întregi este notată cu $\mathbb{Z}$.

7.7 Definiţie. Se numeşte *număr par* un număr întreg a cu proprietatea că există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $a = 2k$. Pentru orice număr întreg b, numărul întreg $b^2 = b\cdot b$ se numeşte *pătratul numărului b*.

Fiind date două numere întregi a şi b, spunem că *a divide b* (notaţie: $a|b$) dacă există $c \in \mathbb{Z}$ astfel încît $b = ac$. Formulări echivalente: *b este multiplu al lui a, a este divizor al lui b, b este divizibil cu a.*

De exemplu, numărul întreg 16 este par, deoarece există $8 \in \mathbb{Z}$ astfel încît $16 = 2\cdot 8$. Pătratul lui 3 este $3^2 = 9$. Observăm că are loc: $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \textit{ este par} \Leftrightarrow 2|a)$.

7.8 Exerciţiu. Definiţi, prin analogie cu noţiunea de număr par, noţiunea de *număr impar* şi daţi exemple de numere impare.

Considerăm următoarea teoremă:

7.9 Teoremă. *Pătratul unui număr întreg impar este un număr impar.*[23]

---

[23] Acesta este doar un exemplu cu scop didactic şi ilustrativ. Acest enunţ nu va fi numit teoremă în nicio carte serioasă de matematică.

Deşi acest tip de enunţ este perfect valabil într-un text matematic, e recomandabil să i se dea o formulare mai precisă, cum ar fi:

Pentru orice număr întreg a, dacă a este impar, atunci a^2 este impar.

Formal:

$$(\forall a \in \mathbb{Z})(a \text{ este impar} \Rightarrow a^2 \text{ este impar}). \tag{T}$$

Detaliind definiţia numărului impar:

$$(\forall a \in \mathbb{Z})[[(\exists k \in \mathbb{Z})(a = 2k + 1)] \Rightarrow [(\exists q \in \mathbb{Z})(a^2 = 2q + 1))]]$$

Dacă vrem să redactăm o demonstraţie, putem scrie ipoteza şi concluzia:

Ipoteza: $(a \in \mathbb{Z}) \wedge (\exists k \in \mathbb{Z})(a = 2k + 1)$

Concluzia: $(\exists q \in \mathbb{Z})(a^2 = 2q + 1)$.

Acum putem redacta o demonstraţie:

Demonstraţie. Fie $a \in \mathbb{Z}$, a impar. Din definiţia noţiunii de număr impar, $\exists k \in \mathbb{Z}$ astfel încît $a = 2k + 1$. Atunci $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Fie $q = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. Deci, $a^2 = 2q + 1$, adică a^2 este impar. □

Subliniem din nou că *în scrierea formală a unei teoreme nu apar variabile libere.* Expresia:

$$a \in \mathbb{Z}, (a \text{ este impar} \Rightarrow a^2 \text{ este impar})$$

nu este o teoremă, căci are variabila liberă a.

Mai remarcăm folosirea în (T) a simbolului $\Rightarrow$ exact în sensul definiţiei sale, adică "pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, implicaţia *a este impar* $\rightarrow$ *a^2 este impar* este adevărată".

Am folosit simbolul □ pentru a marca sfîrşitul unei demonstraţii.

Demonstraţia de mai sus este un exemplu de *demonstraţie directă*. În acest tip de demonstraţie, se porneşte de la ipoteză şi se deduc (prin argumente valide), succesiv una din alta, mai multe afirmaţii A_1, …. A_n, ultima dintre ele fiind concluzia. Putem vizualiza acest proces astfel în cazul demonstraţiei directe:

$$\text{Ipoteza} \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n = \text{Concluzia}$$

7.10 Exerciţiu. Traduceţi teoremele următoare în limbaj formal, scrieţi ipoteza şi concluzia şi redactaţi o demonstraţie directă pentru fiecare din ele:

(1) *Dacă n şi m sînt multipli de* 3, *atunci* $n + m$ *este multiplu de* 3.

(2) *Fie a, b, c, m, n numere întregi. Dacă* $a|b$ *şi* $a|c$, *atunci* $a|(bm + cn)$.

(3) *Pătratul unui număr întreg par este un număr par.*

(4) *Fie a, b numere întregi. Dacă* $a + b$ *este par, atunci* $a^2 + b^2$ *este par.*

(5) *Fie a, b, n numere întregi,* $n > 0$. *Dacă* $a|b$, *atunci* $a^n|b^n$.

(6) *Fie a, b numere întregi. Dacă* $a + b$ *şi ab sînt divizibile prin* 3, *atunci* $3|a^2 + b^2$.

(7) *Fie a, b numere naturale. Dacă* $a \neq 2b$, $b \neq 2a$, $a|2b$ şi $b|2a$, *atunci* $a = b$.

7.11 Teoremă. *Orice număr întreg este fie par, fie impar.*

Formal: $(\forall n \in \mathbb{Z})[(n \text{ este par}) \vee (n \text{ este impar})]$.[24]

Deşi "teorema" noastră pare evidentă, se foloseşte de fapt pentru demonstraţia ei riguroasă un rezultat important, a cărui demonstraţie o vom da după ce prezentăm principiul de demonstraţie prin inducţie:

Teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{N}$:

$$(\forall a, b \in \mathbb{N})\ [(b \neq 0) \Rightarrow (\exists q, r \in \mathbb{N})(a = bq + r\ \wedge r < b).$$[25]

Putem scrie acum:

Demonstraţie. Fie $n \in \mathbb{Z}$. Vrem să aplicăm teorema împărţirii cu rest în $\mathbb{N}$, deci avem două cazuri:

i) $n \geq 0$, deci $n \in \mathbb{N}$. Din teorema împărţirii cu rest a lui n la 2, există $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încît $n = 2q + r$, cu $r < 2$. Cum r este număr natural, $r = 0$ sau $r = 1$. Dacă $r = 0$, atunci $n = 2q$, adică n este par. Dacă $r = 1$, atunci $n = 2q + 1$, adică n este impar.

ii) $n < 0$, deci $-n \in \mathbb{N}$. La fel ca mai sus, există $q, r \in \mathbb{N}$ astfel încît $-n = 2q + r$, cu $r = 0$ sau $r = 1$. Dacă $r = 0$, atunci $n = 2\cdot(-q)$, adică n este par. Dacă $r = 1$, atunci $-n = 2\cdot q + 1$, adică $n = 2\cdot(-q) - 1 = 2\cdot(-q - 1) + 1$, adică n este impar. □

7.12 Observaţie. Uneori, cînd avem de demonstrat ceva de forma $I \Rightarrow (p \vee q)$, putem demonstra în loc că $(I \wedge \neg p) \Rightarrow q$. (Intuitiv: dacă p este adevărată, am terminat. Dacă p este falsă, trebuie să demonstrăm q, în ipoteza I; deci $(I \wedge \neg p) \Rightarrow q$).

Este dificil, şi destul de puţin util din punct de vedere practic, de a da o clasificare exhaustivă a tipurilor de demonstraţii. Totuşi, prezentăm două "metode de demonstraţie", foarte utilizate în practică.

Prima metodă (*demonstraţia prin contrapoziţie*) foloseşte identitatea logică

$$(I \rightarrow C) \equiv (\neg C \rightarrow \neg I)$$

Practic, *pentru a demonstra concluzia C în ipoteza I, presupunem că C este falsă şi demonstrăm* $\neg I$.

A doua metodă (*demonstraţia prin reducere la absurd*) foloseşte identitatea logică

$$(I \rightarrow C) \equiv [(I \wedge \neg C) \rightarrow (r \wedge \neg r)]$$

Astfel, *pentru a demonstra prin reducere la absurd* $I \Rightarrow C$, *se presupune că are loc I şi totuşi C este falsă. De aici se deduce o contradicţie:* $(r \wedge \neg r)$. Aşadar, presupunerea că C este falsă conduce la o contradicţie, deci C nu poate fi falsă.

Demonstraţia prin contrapoziţie a implicaţiei $I \rightarrow C$ poate fi văzută ca un caz particular de demonstraţie prin reducere la absurd. În ambele metode, se presupune concluzia C falsă (adică

[24] De fapt, exprimarea "fie par, fie impar" înseamnă şi că numărul nu poate fi simultan par şi impar. Vom demonstra asta mai jos.

[25] Se spune că q este *cît*, iar r este *rest* al *împărţirii cu rest a lui a la b*.

are loc $\neg C$). Metoda contrapoziţiei caută să arate că I este falsă (adică are loc contradicţia $I \wedge \neg I$, căci I este adevărată, fiind ipoteza teoremei!). Metoda reducerii la absurd caută o contradicţie de tipul $r \wedge \neg r$ (unde r nu este cunoscută dinainte, trebuie găsită de voi!).

Să luăm următorul exemplu:

7.13 Teoremă. *Un număr întreg nu poate fi simultan par şi impar.*

Enunţul se poate reformula: $(\forall n \in \mathbb{Z})(n$ este par $\Rightarrow n$ nu este impar).

O demonstraţie prin reducere la absurd ar fi:

Fie $n \in \mathbb{Z}$, par. Presupunem prin reducere la absurd că n este impar. Deci există k şi $q \in \mathbb{Z}$ astfel încît $n = 2k$ şi $n = 2q + 1$. Atunci $2k = 2q + 1$, adică $2(k - q) = 1$. Deci $k - q \geq 0$. (Într-adevăr, presupunerea că $k - q < 0$ implică $2(k - q) < 0$, adică $1 < 0$, absurd.[26]). Dacă $k - q = 0$, obţinem $0 = 1$ (absurd), iar dacă $k - q \geq 1$, obţinem $1 = 2(k - q) \geq 2$, absurd. □

7.14 Teoremă. *Dacă pătratul unui număr întreg este par, atunci numărul este par.*

Demonstraţie. Enunţul formal este: $(\forall n \in \mathbb{Z})$ (n^2 este par $\Rightarrow n$ este par). Încercăm o demonstraţie prin contrapoziţie. Presupunem că n nu este par. Din teorema **7.11**, n este impar. Deci n^2 este impar din teorema **7.9.** Deci n^2 nu este par, din teorema **7.13.** □

Pentru următorul exemplu, presupunem cunoscute conceptele de *număr raţional*, *număr real* şi faptul că orice număr raţional poate fi scris sub forma $\frac{a}{b}$, unde $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, iar a şi b sînt *prime între ele* (adică nu au divizori comuni în afară de 1 şi -1). Se numeşte *număr iraţional* un număr real care nu este raţional.

7.15 Teoremă. *Numărul real* $\sqrt{2}$ *este iraţional.*

Înainte de a începe demonstraţia, trebuie să clarificăm ce înţelegem prin $\sqrt{2}$. O definiţie ar fi: "$\sqrt{2}$ este unicul număr real pozitiv al cărui pătrat este 2." Pentru ca definiţia aceasta să fie valabilă, trebuie demonstrat în prealabil un rezultat de tipul:

Există un unic număr real $x > 0$ *astfel încît* $x^2 = 2$.

Desigur, dacă vrem să nu muncim degeaba (de exemplu să demonstrăm că există şi $\sqrt{3}$ etc.), ar fi preferabil să demonstrăm că:

Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, *există un unic număr real* $x > 0$ *astfel încît* $x^2 = a$.

Admitem că este demonstrat acest rezultat. Putem da următoarea:

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Deci există $a, b \in \mathbb{N}^*$, prime între ele, cu $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Ridicînd la pătrat ambii membri şi înmulţind cu numitorul, obţinem $2b^2 = a^2$, deci a^2 este par. Din teorema **7.14**, a este par, adică există $k \in \mathbb{N}$ cu $a = 2k$. Înlocuind în relaţia $2b^2 = a^2$, rezultă $2b^2 = 4k^2$, adică $b^2 = 2k^2$, deci b^2 este par, adică b este

[26] Observaţi că în această paranteză este o mică demonstraţie prin reducere la absurd!

par. Astfel, a şi b sînt pare, adică 2 este divizor comun al lor, contradicţie cu a şi b prime între ele. □

Reciprocă a unei teoreme. Fiind dată o teoremă de forma

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ (I \Rightarrow C),$$

reciproca sa este propoziţia

$$(\forall x_1)\ldots(\forall x_n)\ (C \rightarrow I),$$

care poate să fie adevărată sau nu.

Nu orice teoremă are reciprocă. De exemplu, teorema *Orice număr întreg este fie par, fie impar* se scrie formal $(\forall n \in \mathbb{Z})[(n$ este par$) \vee (n$ este impar$)]$. Această propoziţie nu este de tipul $(\forall n \in \mathbb{Z})(I \Rightarrow C)$, căci în $[(n$ este par$) \vee (n$ este impar$)]$ nu apare nicio implicaţie.

Dacă reformulăm teorema astfel: $(\forall n \in \mathbb{Z})[(n$ nu este par$) \Rightarrow (n$ este impar$)]$, atunci putem formula reciproca: $(\forall n \in \mathbb{Z})[(n$ este impar$) \Rightarrow (n$ nu este par$)]$, care este adevărată.

7.16 Exemplu. "*Dacă* n *şi* m *sînt multipli de* 3, *atunci* $n + m$ *este multiplu de* 3." are enunţul formal $(\forall n, m \in \mathbb{Z})[(3|n \wedge 3|m) \Rightarrow 3|n + m]$. Reciproca ei este deci

$$(\forall n, m \in \mathbb{Z})[3|n + m \Rightarrow (3|n \wedge 3|m)].$$

În limbaj natural: "Dacă suma a două numere este multiplu de 3, atunci fiecare din numere este multiplu de 3." Enunţul e fals. De ce?

Pentru fiecare din teoremele din exerciţiul **7.10**, enunţaţi reciproca, decideţi dacă e adevărată şi justificaţi decizia.

7.17 Definiţie. Un număr natural p se numeşte *număr prim* dacă este diferit de 0 şi 1 şi singurii săi divizori sînt 1 şi p.

7.18 Exerciţiu. Traduceţi teoremele următoare în limbaj formal, scrieţi ipoteza şi concluzia şi redactaţi o demonstraţie pentru fiecare din ele. Formulaţi şi reciproca fiecărei teoreme.

(1) *Fie* $n \in \mathbb{Z}$. *Dacă* n^2 *este impar, atunci* n *este impar.*

(2) *Fie* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Dacă* a *nu divide* bc, *atunci* a *nu divide* b *şi* a *nu divide* c.

(3) *Fie* $a, b, c \in \mathbb{Z}$. *Dacă există* $d \in \mathbb{Z}$ *astfel încît* $d|a$, $d|b$ *şi* d *nu divide* c, *atunci ecuaţia* $ax + by = c$, $x, y \in \mathbb{Z}$ *nu are soluţie.*

(4) *Fie* $c \in \mathbb{N}^*$, c *nu este prim. Atunci există* $b \in \mathbb{N}$ *cu* $b|c$ *şi* $b \le \sqrt{c}$.

(5) *Fie* $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, *cu proprietatea că pentru orice* $a, b \in \mathbb{N}$, *dacă* $q|ab$, *atunci* $q|a$ *sau* $q|b$. *Atunci* $\sqrt{q}$ *este iraţional.*

(6) *Fie* $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, *cu proprietatea că pentru orice* $a, b \in \mathbb{N}$, *dacă* $q|ab$, *atunci* $q|a$ *sau* $q|b$. *Atunci* q *este prim.*

(7) *Fie* $n \in \mathbb{Z}$. *Atunci* $n^2 + n$ *este par.*

(8) *Fie* $n \in \mathbb{Z}$. *Atunci* $3|n^3 - n$

(9) *Fie* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Dacă* mn *este impar, atunci* m *şi* n *sînt impare.*

(10) *Fie* $k \in \mathbb{Q}$ şi m *un număr iraţional. Atunci* mk *este iraţional.*