În toate problemele, $R$ este un inel comutativ şi unitar dacă nu se specifică altfel.

**1)** Fie $M$ un $R$-modul. Demonstraţi că are loc izomorfismul de $R$-module: $\mathrm{Hom}_R(R, M) \cong M$.

**2)** Un $R$-modul $S$ se numeşte *simplu* dacă $S \neq 0$ şi singurele sale submodule sînt 0 şi $S$.

a) Fie $S$ un $R$-modul. Demonstraţi că: $S$ este modul simplu $\Leftrightarrow$ Există $M$ un ideal maximal în $R$ astfel încît $S \cong R/M$.

b) Fie $\varphi : E \to F$ un morfism de $R$-module simple. Demonstraţi că $\varphi = 0$ sau $\varphi$ este izomorfism.

**3)** Fie $E$, $F$ submodule în $R$-modulul $M$. Demonstraţi *teorema II de izomorfism*:

$$(E+F)/F \cong E/(E \cap F).$$

**4)** Fie $I$ un ideal nenul în $R$. Demonstraţi că: $I$ este un $R$-modul liber $\Leftrightarrow$ $I$ este ideal principal generat de un element care nu e divizor al lui 0 în $R$.

**5)** Fie $R$ un inel comutativ unitar (cu $1 \neq 0$) cu proprietatea că orice $R$-modul finit generat este liber. Demonstraţi că $R$ este corp.

**6)** Aduceţi matricele de mai jos la forma diagonal canonică prin operaţii elementare pe linii şi coloane:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$; b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{Z})$; c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$.

În cazul a), reprezentaţi grafic submodulul lui $\mathbb{Z}^2$ generat de liniile matricei. În cazurile *b), c)*, dacă $L$ este submodulul lui $\mathbb{Z}^3$ generat de liniile lui $A$, determinaţi o bază a lui $L$, rangul lui $L$ şi modulul factor $\mathbb{Z}^3/L$.

**7)** Fie $A \in M_k(\mathbb{Z})$ şi $\varphi : \mathbb{Z}^k \to \mathbb{Z}^k$ morfismul de $\mathbb{Z}$-module dat de înmulţirea cu $A$. Demonstraţi că: $\mathbb{Z}^k/\mathrm{Im}\varphi$ are un număr finit de elemente $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$. Dacă $\det A \neq 0$, atunci numărul de elemente al lui $\mathbb{Z}^k/\mathrm{Im}\varphi$ este $|\det A|$.

**8)** Aduceţi matricele de mai jos la forma diagonal canonică:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 9 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[i])$;

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(F[X])$, unde $F$ este un corp şi $a, b, c, d \in F$. Discuţie după $a, b, c, d$.

(Atenţie, inelul este $F[X]$!)

**9)** Găsiţi o bază pentru urmatoarele submodule ale lui $\mathbb{Z}^3$:

a) Submodulul generat de $(1, 0, -1)$, $(2, -3, 1)$, $(0, 3, 1)$, $(3, 1, 5)$.

b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mid x + 2y + 3z = 0 \text{ şi } x + 4y + 9z = 0\}$ (demonstraţi în prealabil că $S$ este submodul. Puteţi generaliza?)

**10)** Exerciţiul are drept scop demonstrarea faptului că, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$, cu $d \in \mathbb{Z}$ liber de pătrate, are loc: inelul factor $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/(\alpha)$ este finit şi cardinalul său este $|\mathrm{N}(\alpha)|$.

a) Demonstraţi că $\mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$ este $\mathbb{Z}$-modul liber, de bază $\{1, \sqrt{d}\,\}$.

b) Funcţia $\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,] \to \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$, $\varphi(z) = \alpha z$, $\forall z \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}\,]$, este un morfism de $\mathbb{Z}$-module.

c) Scrieţi matricea morfismului $\varphi$ în baza dată.

d) Folosiţi problema **7.**