Raport ştiinţific
privind implementarea proiectului în perioada ianuarie – decembrie 2012
a contractului de cercetare

Regularitate şi senzitivitate în optimizarea multicriterială

PN-II-ID-PCE-2011-3-0084, nr. 239/05.10.2011

Obiectivele propuse pentru anul 2012 au fost studiul şi obţinerea rezultatelor corespunzătoare următoarelor două tematici asumate prin propunerea de proiect:

- Mărginirea erorii pentru probleme de optimizare vectorială liniară
- Regularitate metrică şi condiţii de calificare

În prezentul raport prezentăm principalele rezultate obţinute de la începutul acestui grant până în acest moment (octombrie 2011 – decembrie 2012), dat fiind faptul că temele mai sus menţionate corespund acestei perioade, conform planului iniţial de derulare a proiectului. Rezultatele pe care le prezentăm sunt conţinute în articolele [5], [6], [7], [8], [21] şi [22].

Referitor la primul obiectiv, am abordat problema mărginirii erorii in cadrul general al problemelor de optimizare cu mulţimi, urmând să revenim asupra problemelor de optimizare vectorială liniară. Rezultatele următoare sunt conţinute în lucrarea [22].

Teeorema 1 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet, Y un spaţiu liniar topologic, $K \subset Y$ un con convex închis propriu, $H \subset K$ o mulţime convexă cu $0 \notin \mathrm{cl}(H+K)$, şi $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ a multifuncţie cu $\mathrm{dom}\,\Gamma \neq \emptyset$. Presupunem că $\{x \in X \mid \Gamma(u) \subset \Gamma(x) + d(x,u)H + K\}$ este închisă pentru orice $u \in X$, şi că $\Gamma(X)$ este quasi mărginită, adică există o mulţime $B \subset Y$ astfel încât $\Gamma(X) \subset B + K$. Dacă $S \subset X$ este astfel încât*

$$\forall x \in \mathrm{dom}\,\Gamma \setminus S,\ \exists u \in X \setminus \{x\} : \Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x,u)H + K, \tag{1}$$

atunci $S \cap \mathrm{dom}\,\Gamma \neq \emptyset$ şi

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + d(x, S \cap \mathrm{dom}\,\Gamma)H + K \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe o variantă ceva mai generală a Teoremei 4.2 din [20]. Un rezultat mai general este următorul:

Teeorema 2 *Fie X, Y, K, H, Γ ca în teorema precedentă. Dacă $S, W \subset \mathrm{dom}\,\Gamma$ cu $S \neq \emptyset$ sunt astfel încât pentru orice $x \in \mathrm{dom}\,\Gamma \setminus (S \cup W)$ există $u \in X \setminus \{x\}$ cu $\Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x,u)H + K$, şi*

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \eta d(x,S)H + K \quad \forall x \in W \tag{3}$$

pentru un $\eta > 0$, atunci, pentru $\mu := \min(\eta, 1)$,

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \mu d(x,S)H + K \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Un candidat natural pentru S in Teoremele 1, 2 este mulţimea soluţiilor problemei

$$(P) \qquad \min\nolimits_K \Gamma(x), \quad x \in X$$

în sensul lui Kuroiwa: $\overline{x}$ este soluţie a problemei (P) dacă $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + K \Rightarrow \Gamma(x) \subset \Gamma(\overline{x}) + K$; această alegere a noţiunii de soluţie pentru (P) este naturală în cazul Teoremei 1 deoarece concluzia [20, Th. 4.2] afirmă că $\overline{x}$ este o soluţie strictă a problemei (P) (în sensul lui Kuroiwa) pentru Γ înlocuit prin Γ', unde $\Gamma'(x) := \Gamma(x) + d(x,\overline{x})H$.

Un caz particular al Teoremei 1 este următorul corolar care însumează rezultate ale lui Takahashi [19] şi Hamel [10].

Corolarul 3 *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Dacă pentru $\gamma \in (0,\infty)$ fixat şi pentru orice $x \in X$ cu $f(x) > \inf f$ există $u \in X \setminus \{x\}$ astfel încât $f(u) + \gamma d(x,u) \leq f(x)$, atunci $S := \arg\min f$ este nevidă şi*

$$\gamma d(x,S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

Corespunzător Teoremei 2 avem rezultatul următor:

Corolarul 4 *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Presupunem că $S := \arg\min f \neq \emptyset$, $W \subset \operatorname{dom} f$, şi $\gamma, \eta \in (0,\infty)$ sunt astfel încât pentru orice $x \in \operatorname{dom} f \setminus (S \cup W)$ există $u \in X \setminus \{x\}$ astfel încât $f(u) + \gamma d(x,u) \leq f(x)$, şi $\eta d(x,S) \leq f(x) - \inf f$ pentru orice $x \in W$. Atunci, pentru $\mu := \min(\gamma,\eta)$,*

$$\mu d(x,S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X.$$

Utilizând corolarul precedent obţinem rezultatul următor.

Corolarul 5 *Fie (X,d) spaţiu metric complet şi $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in \overline{1,n})$ funcţii proprii şi isc cu $S := \cap_{i=1}^{n}[f_i \leq 0] \neq \emptyset$. Presupunem că există $W \subset D := \cap_{i=1}^{n} \operatorname{dom} f_i$ şi $\gamma, \eta \in (0,\infty)$ satisfăcând condiţiile:*

(i) *pentru orice $x \in D \setminus (S \cup W)$ există $\widehat{x} \in X \setminus \{x\}$ a.î. $I_>(\widehat{x}) \subset I_>(x)$ şi $\gamma d(x,\widehat{x}) \leq \sum_{i \in I_>(x)} [(f_i)_+(x) - (f_i)_+(\widehat{x})]$, unde $I_>(x) := \{i \in \overline{1,n} \mid f_i(x) > 0\}$, şi*

(ii) *$\eta d(x,S) \leq \sum_{i \in I_>(x)} (f_i)_+(x)$ pentru orice $x \in W$.*

Atunci, $\mu d(x,S) \leq \sum_{i=1}^{n} (f_i)_+(x)$ pentru orice $x \in X$, unde $\mu := \min(\gamma,\eta)$.

Corolarul 5 furnizează condiţii suficiente pentru mărginirea erorii pentru sistemul $f_i(x) \leq 0,\ i \in \overline{1,n}$. Acest rezultat este practic [13, Teorema 4.1]; acolo X este un Banach şi în loc de (i) se cere ca orice $x \in X \setminus (S \cup W)$ să aibă proprietatea de γ-descreştere.

Alte rezultate conexe sunt conţinute în lucrările [21] (acceptată) şi [16] (trimisă spre publicare).

ÎIn cadrul celui de-al doilea obiectiv, i.e., *Regularitate metrică şi condiţii de calificare*, am terminat etapa de documentare şi am obţinut mai mai multe rezultate conţinute în lucrările [5], [7], [6] şi [8].

Menţionăm pe scurt principalele motivaţii care au stat la baza acestor studii şi cele mai importante rezultate obţinute.

Lucrarea [5] este dedicată optimizării parametrice cu restricţii de tip echilibru, acest subiect fiind în ultimele decade la originea multor eforturi îndreptate în direcţia studiului sistemelor variaţionale. Cităm aici importantele lucrări ale lui Robinson [17], Dontchev şi Rockafellar [9], Mordukhovich [15] pentru o discuţie detaliată şi pentru un istoric al acestui subiect.

Motivaţia noastră este dată de unele probleme parametrice de optimizare (în notaţiile noastre mulţimea parametrilor este P şi este iniţial considerată ca spaţiu topologic). Fie X, Y spaţii Banach. In cazul cel mai simplu al unei funcţii obiectiv parametrice cu valori scalare $f : X \times P \to \mathbb{R}$, considerăm problema

$$(P_S): \quad \min f(x,p) \text{ cu } 0 \in H(x,p),$$

unde $H : X \times P \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie ce defineşte un sistem de constrângeri generalizat prin relaţia $0 \in H(x,p)$. Multifuncţia implicită $S : P \rightrightarrows X$ asociată lui H este

$$S(p) = \{x \in X \mid 0 \in H(x,p)\}.$$

Putem înţelege conceptul de soluţie pentru (P_S) în cel puţin două moduri diferite iar ideea de studiu al condiţiilor necesare de optimalitate este aceea de a transforma problema cu restricţii într-una fără restricţii de forma $f(x,p) + Ld(x,S(p))$ sau $f(x,p) + Ld((p,x),\operatorname{Gr} S)$. In ambele cazuri. este nevoie de proprietăţi de regularitate a sistemului de constrângeri de forma 1) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d(x,S(p)) \leq r d(0,H(x,p)) \tag{6}$$

are loc pentru orice $p \in M$ şi orice x într-o vecinătate a lui $\overline{x}$ sau 2) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d((p,x),\operatorname{Gr} S) \leq r d((x,p,0),\operatorname{Gr} H) \tag{7}$$

are loc pentru orice (x,p) într-o vecinătate a lui $(\overline{x},\overline{p})$.

Astfel, în articolul menţionat, stabilim mai multe condiţii noi ce asigură inegalităţile (6) şi (7) cu un accent special pe cazul multifuncţiilor de tip epigraf ce sunt esenţiale în optimizare. Apoi, aplicăm aceste rezultate asupra unor probleme vectoriale specifice cu scopul de a obţine noi condiţii necesare de optimalitate.

Pentru mai multe detalii asupra tehnicilor folosite şi a rezultatelor obţinute, a se vedea lucrarea [5].

O altă lucrare ce se referă la a doua tematică a perioadei raportate este articolul [7] care conţine un studiu motivat de importanţa mulţimilor tangente şi a proprietăţilor lor de calcul în abordarea unor probleme matematice diverse: optimizare, viabilitate sau control optimal. Capitolul 4 din cuprinzătoarea monografie [2] pune în evidenţă cu claritate această idee care reprezintă substratul motivaţional al multor articole din literatură. Punctul de plecare al lucrării noastre este observaţia că mai multe lucrări recente din literatura ultimilor ani (a se vedea, de exemplu, [14], [12]) utilizează condiţii destul de tari asupra datelor iniţiale pentru a obţine reguli de calcul pentru tangenţa generalizată. Vorbim aici despre condiţii privitoare la mai multe tipuri de compactitate generalizată a graficelor unor multifuncţii ce intervin pe parcurs, iar astfel de condiţii sunt foarte puternice în cadrul spaţiilor normate infinit dimensionale. În ceea ce ne priveşte, pentru stabilirea unor reguli de calcul pentru mulţimi tangente, preferăm să urmăm un drum iniţiat în [2, Capitolul 4] care permite utilizarea ipotezelor de regularitate metrică ce sunt mai adecvate cadrului menţionat. Unul dintre rezultatele principale obţinute este următorul.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie între spaţiile Banach X, Y şi $f : X \to X$ o funcţie. Notăm cu $F \circ f$ multifuncţia de la X la Y dată prin $(F \circ f)(x) = F(f(x))$ pentru orice $x \in X$. Prin $D_B F(\overline{x}, \overline{y})$ notăm derivata Bouligand a lui F în punctul $(\overline{x}, \overline{y})$ al graficului său.

Teorema 6 *Fie $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafic închis, $f : X \to X$ de clasă C^1 şi $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr}(F_2 \circ f)$. Presupunem că funcţia $g : (X \times Y)^2 \longrightarrow X$, $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(\alpha) - \gamma$ este metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1, f(\overline{x}), \overline{y}_2)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F_1 \times \operatorname{Gr} F_2$. Dacă F_1 este proto-diferenţiabilă în $\overline{x}$ relativ la $\overline{y}_1$ sau F_2 este proto-diferenţiabilă în $f(\overline{x})$ relativ la $\overline{y}_2$, atunci, pentru orice $u \in X$,*

$$D_B F_1(\overline{x}, \overline{y}_1)(u) + D_B F_2(f(\overline{x}), \overline{y}_2)(\nabla f(\overline{x})(u)) \subset D_B(F_1 + F_2 \circ f)(\overline{x}, \overline{y}_1 + \overline{y}_2)(u).$$

Reguli de calcul pentru coderivatele de ordinul al doilea sunt de asemenea obţinute şi apoi aplicăm aceste rezultate pentru a obţine condiţii de optimalitate pentru probleme vectoriale. Cazul multifuncţiilor parametrice este analizat separat şi, într-un caz particular, regăsim un rezultat al lui Rockafellar din lucrarea [18] (Teorema 5.4).

În lucrările [6] şi [8] am obţinut rezultate referitoare la deschiderea cu rată liniară a multifuncţiilor de tip compunere, mai întâi definite între spaţii Banach, iar mai apoi între spaţii metrice generale. Ca aplicaţii directe, se pot obţine teoreme de tip Lyusternik-Graves, atât în forma cunoscută în literatură, cât şi variante noi ale acesteia. De asemenea, se obţin ca aplicaţii teoreme de tip punct fix pentru multifuncţii, ce intră în relaţie cu rezultate foarte recente din lucrările [1], [11], [3], [4]. Regularitatea multifuncţiei soluţie asociată cu sisteme variaţionale parametrice a fost de asemenea investigată, oferindu-se condiţii suficiente care asigură proprietatea Aubin, respectiv regularitatea metrică a acesteia. Estimări precise ale modulelor de regularitate au fost precizate. Rezultatele noastre le acoperă şi le extind la cazul complet multivoc mai multe rezultate din litreratura recentă. Prezentăm pe scurt rezultatele principale.

Cel mai important rezultat, demonstrat în [6] în cadrul spaţiilor Banach (prin intermediul Principiului Variaţional Ekeland) şi extins mai apoi în [8] la spaţii metrice generale (cu o demonstraţie complet diferită, bazată pe o procedură iterativă de tip Lyusternik), este următorul.

Teorema 7 *Fie X, Y, Z, W spaţii metrice, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ şi $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in X \times Y \times Z \times W$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{z}) \in \operatorname{Gr} F_2$ şi $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w}) \in \operatorname{Gr} G$. Fie $H : X \rightrightarrows W$ definită prin*

$$H(x) := G(F_1(x), F_2(x)) \quad \forall x \in X.$$

Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:

(i) $\operatorname{Gr} F_1$, $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, $(\overline{x}, \overline{z})$, respectiv, iar $\operatorname{Gr} G$ este local închis în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$;

(ii) F_1 este deschisă cu rata liniară $L > 0$ în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{z})$ cu modulul $M > 0$;

(iv) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $C > 0$;

(v) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $D > 0$;

(vi) $LC - MD > 0$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\overline{w}, (LC - MD)\rho) \subset H(B(\overline{x}, \rho)).$$

Mai mult, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y', z', w') \in B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}, \varepsilon') \times B(\overline{z}, \varepsilon') \times B(\overline{w}, \varepsilon')$ astfel încât $(y', z') \in (F_1, F_2)(x')$ şi $w' \in G(y', z')$,

$$B(w', (LC - MD)\rho) \subset H(B(x', \rho)).$$

Drept aplicaţie a rezultatului principal, prezentat mai sus, obţinem următoarea variantă a Teoremei Lyusternik-Graves, necunoscută până acum.

Corolarul 8 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat şi $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii, $(\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2) \in X \times Y \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr} F_2$, cu $\overline{y}_1 \neq \overline{y}_2$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $\operatorname{Gr} F_1$ şi $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2)$, respectiv;

(ii) F_1 e metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ cu modulul $l > 0$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_2)$ cu modulul $m > 0$;

(iv) $lm < 1$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\|\overline{y}_1 - \overline{y}_2\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(\overline{x}, \rho)\}.$$

În plus, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y_1', y_2') \in \operatorname{Gr}(F_1, F_2) \cap [B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}_1, \varepsilon') \times B(\overline{y}_2, \varepsilon')]$,

$$B(\|y_1' - y_2'\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(x', \rho)\}.$$

O altă aplicaţie o reprezintă următoarea teoremă de punct fix pentru multifuncţii.

Teoorema 9 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1 \cap \operatorname{Gr} F_2$. Presupunem că (i)-(iv) din Corolarul 8 sunt satisfăcute.*

Atunci există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B(\overline{x}, \alpha)$, avem

$$d(x, \operatorname{Fix}(F_1^{-1}F_2)) \leq (l^{-1} - m)^{-1} d(F_1(x) \cap B(\overline{y}, \beta), F_2(x)), \tag{8}$$

unde

$$\operatorname{Fix}(F_1^{-1}F_2) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset\}.$$

Considerăm $H : X \times P \rightrightarrows W$, unde X, P sunt spaţii metrice, iar W este un spaţiu normat, dată prin $H(x,p) := G(F_1(x), F_2(x,p))$, unde $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$. Asociat acestei multifuncţii, considerăm sistemul parametric $0 \in G(F_1(x), F_2(x,p))$. Multifuncţia soluţie asociată acestui sistem este $S : P \rightrightarrows X$, dată prin $S(p) := \{x \in X \mid 0 \in H(x,p)\}$. In finalul lucrării [8] am obţinut două rezultate privind regularitatea aplicaţiei multivoce S. Pentru a putea deduce astfel de teoreme, am introdus şi investigat o nouă noţiune, numită locală stabilitate la compunere, ce are drept principală aplicaţie conservarea proprietăţii Aubin la operaţia de compunere a două multifuncţii. Exemplificăm mai jos această direcţie de lucru.

Teoorema 10 *Fie X, P, Y, Z spaţii metrice, W un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{y}, \overline{z}) \in X \times P \times Y \times Z$ astfel încât $\overline{y} \in F_1(\overline{x})$, $\overline{z} \in F_2(\overline{x}, \overline{p})$ şi $0 \in G(\overline{y}, \overline{z})$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $(F_1, F_2), G$ sunt local stabile la compunere în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), (\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(ii) $\operatorname{Gr} F_1$ este complet, $\operatorname{Gr}(F_2)_p$ este complet pentru orice p într-o vecinătate a lui $\overline{p}$ şi $\operatorname{Gr} G$ este închis;

(iii) F_1 e deschisă cu rată liniară în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iv) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{z})$;

(v) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vi) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vii) $\widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0) < \widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z})$.

Atunci S are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{p}, \overline{x})$. În plus, are loc relaţia

$$\operatorname{lip} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq \frac{\widehat{\operatorname{lip}}_p F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}{\widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z}) - \widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}.$$

Bibliografie

[1] A.V. Arutyunov, *Stability of coincidence points and properties of covering mappings,* Mathematical Notes, 86 (2009), 153–158.

[2] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued Analysis*, Birkäuser, Basel, 1990.

[3] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (2011), 521–534.

[4] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points II*, Journal of Convex Analysis, appeared online.

[5] M. Durea, R. Strugariu, *On parametric vector optimization via metric regularity of constraint systems*, Mathematical Methods of Operations Research, 74 (2011), 409-425.

[6] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in general Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), 899-913.

[7] M. Durea, R. Strugariu, *Calculus of tangent sets and derivatives of set-valued maps under metric subregularity conditions*, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-011-9800-4.

[8] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in metric spaces and applications*, Mathematical Programming Serie A, DOI: 10.1007/s10107-012-0598-8.

[9] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings*, Springer, Berlin, 2009.

[10] A. Hamel, *Remarks to an equivalent formulation of Ekeland's variational principle*, Optimization 31 (1994), 233–238.

[11] A.D. Ioffe, *Towards variational analysis in metric spaces: metric regularity and fixed points*, Mathematical Programming, Serie B, 123 (2010), 241–252.

[12] S. J. Li, C. M. Liao, *Second-order differentiability of generalized perturbation maps*, Journal of Global Optimization, published online, DOI: 10.1007/s10898-011-9661-x

[13] C. G. Liu, K. F. Ng, *Ekeland's variational principle for set-valued functions*, SIAM J. Optim. 21 (2011), 41–56.

[14] S. J. Li, K. W. Meng, J.-P. Penot, *Calculus rules for derivatives of multimaps*, Set-Valued Analysis, 17 (2009), 21–39.

[15] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 330 and 331, Berlin, 2006.

[16] N. M. Nam, C. Zălinescu, *Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems*, submitted.

[17] S.M. Robinson, *Strongly regular generalized equations*, Mathematics of Operations Research, 5 (1980), 43–62.

[18] R. T. Rockafellar, *Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization*, Ann. Inst. H. Poincaré, 6 (1989), 449–482.

[19] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, in "Fixed point theory and applications (Marseille, 1989)", 397–406, Pitman Res. Notes Math. Ser., 252, 1991.

[20] Chr. Tammer, C. Zălinescu, *Vector variational principles for set-valued functions*, Optimization 60 (2011), 839–857.

[21] M. Volle, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Zălinescu, *When some variational properties force convexity*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. (to appear).

[22] C. Zălinescu, *Error bounds for set-valued optimization*, submitted.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu