Raport ştiinţific
privind implementarea proiectului în perioada octombrie 2011 – octombrie 2013
a contractului de cercetare

Regularitate şi senzitivitate în optimizarea multicriterială

PN-II-ID-PCE-2011-3-0084, nr. 239/05.10.2011

Obiectivele propuse pentru perioada octombrie 2011 - octombrie 2013 au fost studiul şi obţinerea rezultatelor corespunzătoare următoarelor două tematici asumate prin propunerea de proiect:

1. Mărginirea erorii pentru probleme de optimizare vectorială liniară
2. Regularitate metrică şi condiţii de calificare
3. Extensii ale Principiului Variational Ekeland pentru multifuncţii
4. Condiţii de existenţă şi optimalitate pentru puncte de minim în optimizarea multicriterială

În prezentul raport prezentăm principalele rezultate obţinute de la începutul acestui grant până în acest moment (octombrie 2011 – octombrie 2013), dat fiind faptul că temele mai sus menţionate corespund acestei perioade, conform planului iniţial de derulare a proiectului. Rezultatele pe care le prezentăm sunt conţinute în următoarele zece articole publicate/acceptate spre publicare: [1], [8], [11], [12], [13], [14], [15], [28], [34] şi [35], precum şi în capitolul 10 al cărţii [21].

Referitor la primul obiectiv, am abordat problema mărginirii erorii in cadrul general al problemelor de optimizare cu mulţimi, urmând să revenim asupra problemelor de optimizare vectorială liniară. Rezultatele următoare sunt conţinute în secţiunea 10.7 a cărţii [21].

Teorema 1 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, Y un spaţiu liniar topologic, $K \subset Y$ un con convex închis propriu, $H \subset K$ o mulţime convexă cu $0 \notin \operatorname{cl}(H + K)$, şi $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ a multifuncţie cu $\operatorname{dom}\Gamma \neq \emptyset$. Presupunem că $\{x \in X \mid \Gamma(u) \subset \Gamma(x) + d(x, u)H + K\}$ este închisă pentru orice $u \in X$, şi că $\Gamma(X)$ este quasi mărginită, adică există o mulţime $B \subset Y$ astfel încât $\Gamma(X) \subset B + K$. Dacă $S \subset X$ este astfel încât*

$$\forall x \in \operatorname{dom}\Gamma \setminus S,\ \exists u \in X \setminus \{x\} : \Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x, u)H + K, \tag{1}$$

atunci $S \cap \operatorname{dom}\Gamma \neq \emptyset$ şi

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + d(x, S \cap \operatorname{dom}\Gamma)H + K \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe o variantă ceva mai generală a Teoremei 4.2 din [33]. Un rezultat mai general este următorul:

Teorema 2 *Fie X, Y, K, H, Γ ca în teorema precedentă. Dacă $S, W \subset \operatorname{dom}\Gamma$ cu $S \neq \emptyset$ sunt astfel încât pentru orice $x \in \operatorname{dom}\Gamma \setminus (S \cup W)$ există $u \in X \setminus \{x\}$ cu $\Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x, u)H + K$, şi*

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \eta d(x, S)H + K \quad \forall x \in W \tag{3}$$

pentru un $\eta > 0$, atunci, pentru $\mu := \min(\eta, 1)$,

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \mu d(x, S)H + K \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Un candidat natural pentru S in Teoremele 1, 2 este mulţimea soluţiilor problemei

$$(P) \qquad \min\nolimits_K \Gamma(x), \quad x \in X$$

în sensul lui Kuroiwa: $\overline{x}$ este soluţie a problemei (P) dacă $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + K \Rightarrow \Gamma(x) \subset \Gamma(\overline{x}) + K$; această alegere a noţiunii de soluţie pentru (P) este naturală în cazul Teoremei 1 deoarece concluzia [33, Th. 4.2] afirmă că $\overline{x}$ este o soluţie strictă a problemei (P) (în sensul lui Kuroiwa) pentru Γ înlocuit prin Γ', unde $\Gamma'(x) := \Gamma(x) + d(x, \overline{x})H$.

Un caz particular al Teoremei 1 este următorul corolar care însumează rezultate ale lui Takahashi [32] şi Hamel [19].

Corolarul 3 *Fie* (X, d) *spaţiu metric complet şi* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Dacă pentru* $\gamma \in (0, \infty)$ *fixat şi pentru orice* $x \in X$ *cu* $f(x) > \inf f$ *există* $u \in X \setminus \{x\}$ *astfel încât* $f(u) + \gamma d(x, u) \leq f(x)$, *atunci* $S := \arg\min f$ *este nevidă şi*

$$\gamma d(x, S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

Corespunzător Teoremei 2 avem rezultatul următor:

Corolarul 4 *Fie* (X, d) *spaţiu metric complet şi* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Presupunem că* $S := \arg\min f \neq \emptyset$, $W \subset \operatorname{dom} f$, *şi* $\gamma, \eta \in (0, \infty)$ *sunt astfel încât pentru orice* $x \in \operatorname{dom} f \setminus (S \cup W)$ *există* $u \in X \setminus \{x\}$ *astfel încât* $f(u) + \gamma d(x, u) \leq f(x)$, *şi* $\eta d(x, S) \leq f(x) - \inf f$ *pentru orice* $x \in W$. *Atunci, pentru* $\mu := \min(\gamma, \eta)$,

$$\mu d(x, S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X.$$

Utilizând corolarul precedent obţinem rezultatul următor.

Corolarul 5 *Fie* (X, d) *spaţiu metric complet şi* $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in \overline{1, n})$ *funcţii proprii şi isc cu* $S := \cap_{i=1}^{n} [f_i \leq 0] \neq \emptyset$. *Presupunem că există* $W \subset D := \cap_{i=1}^{n} \operatorname{dom} f_i$ *şi* $\gamma, \eta \in (0, \infty)$ *satisfăcând condiţiile:*

(i) *pentru orice* $x \in D \setminus (S \cup W)$ *există* $\widehat{x} \in X \setminus \{x\}$ *a.î.* $I_>(\widehat{x}) \subset I_>(x)$ *şi* $\gamma d(x, \widehat{x}) \leq \sum_{i \in I_>(x)} [(f_i)_+(x) - (f_i)_+(\widehat{x})]$, *unde* $I_>(x) := \{i \in \overline{1, n} \mid f_i(x) > 0\}$, *şi*

(ii) $\eta d(x, S) \leq \sum_{i \in I_>(x)} (f_i)_+(x)$ *pentru orice* $x \in W$.

Atunci, $\mu d(x, S) \leq \sum_{i=1}^{n} (f_i)_+(x)$ *pentru orice* $x \in X$, *unde* $\mu := \min(\gamma, \eta)$.

Corolarul 5 furnizează condiţii suficiente pentru mărginirea erorii pentru sistemul $f_i(x) \leq 0$, $i \in \overline{1, n}$. Acest rezultat este practic [26, Teorema 4.1]; acolo X este un Banach şi în loc de (i) se cere ca orice $x \in X \setminus (S \cup W)$ să aibă proprietatea de γ-descreştere.

Corespunzător obiectivului *3. Extensii ale Principiului Variational Ekeland pentru multifuncţii,* ne-am propus sa extindem rezultatele publicate în [33] referitoare la Principiului Variational Ekeland pentru multifuncţii în aşa fel încât să cuprindă rezultate recente de tip EVP stabilite în [29] pentru funcţii, precum şi rezultate din [26].

Considerăm (X, d) un spaţiu metric, Y un spaţiu liniar topologic, $K \subset Y$ un con convex propriu şi $F : X \times X \rightrightarrows K$ satisfăcând condiţiile

(F1) $0 \in F(x, x)$ pentru orice $x \in X$,

(F2) $F(x_1, x_2) + F(x_2, x_3) \subset F(x_1, x_3) + K$ pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in X$.

Observăm că relaţia $\preceq_F$ definită prin

$$(x_1, y_1) \preceq_F (x_2, y_2) \iff y_2 \in y_1 + F(x_1, x_2) + K$$

este o relaţie de preordine (adică este reflexivă şi tranzitivă). De asemenea, pentru $z^* \in K^+$, considerăm şi relaţia de ordine parţială $\preceq_{F,z^*}$ definită prin

$$(x_1, y_1) \preceq_{F,z^*} (x_2, y_2) \iff \begin{cases} (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ sau} \\ (x_1, y_1) \preceq_F (x_2, y_2) \text{ şi } z^*(y_1) < z^*(y_2). \end{cases}$$

De asemenea considerăm şi condiţia

$$\forall \delta > 0,\ \forall (z_n) \subset F_\delta,\ \exists z^* \in K^+ \ :\ \limsup z^*(z_n) > 0, \tag{6}$$

unde, pentru $\delta \geq 0$,

$$F_\delta := \cup_{d(x,x') \geq \delta} F(x, x').$$

Teorema 6 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex propriu. Presupunem că*

(i) $F : X \times X \rightrightarrows Y$ *satisface condiţiile (F1), (F2) şi (6), iar*

(ii) $A \subset X \times Y$ *verifică condiţia*

(H1) *pentru orice şir* $\preceq_F$*–descrescător* $((x_n, y_n)) \subset A$ *cu* $x_n \to x \in X$ *există* $y \in Y$ *astfel încât* $(x, y) \in A$ *şi* $(x, y) \preceq_F (x_n, y_n)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci pentru orice $(x_0, y_0) \in A$ *şi orice* $z^* \in K^+$ *astfel încât* $z^*(\mathrm{Pr}_Y(A))$ *este mărginită inferior, există un element minimal* $(\bar{x}, \bar{y})$ *a lui* A *relativ la* $\preceq_{F,z^*}$ *astfel încât* $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{F,z^*} (x_0, y_0)$*. In plus, dacă* $z^*(z) > 0$ *pentru orice* $z \in \cup_{\delta>0} F_\delta$*, atunci* $A \ni (x, y) \preceq_F (\bar{x}, \bar{y})$ *implică* $x = \bar{x}$.

Pentru a aplica rezultatul precedent la cazul funcţiilor definite pe submulţimi ale lui X, adăugăm la Y două elemente distincte $-\infty$ şi $+\infty$ care nu se găsesc în Y, obţinând astfel spaţiul $Y^\bullet := Y \cup \{-\infty, \infty\}$. Considerăm că $-\infty \leq_K y \leq_K \infty$ pentru orice $y \in Y$. Fie funcţia $f : X \to Y^\bullet$. Ca de obicei, $\operatorname{dom} f = \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$, $\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leq_K y\}$; f este proprie dacă $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ şi $f(x) \neq -\infty$ pentru orice $x \in X$; graficul funcţiei proprii f este $\operatorname{graph} f = \{(x, f(x)) \mid x \in \operatorname{dom} f\}$. Pentru $y^* \in K^+$ punem $(y^* \circ f)(x) := +\infty$ pentru $x \in X \setminus \operatorname{dom} f$.

Utilizând teorema precedentă obţinem următorul rezultat; acesta este practic echivalent cu [29, Th. 3.6].

Teorema 7 *Fie* X, Y, K *precum în teorema precedentă. Presupunem că* $F : X \times X \rightrightarrows K$*, iar* $f : X \to Y^\bullet$ *este o funcţie proprie satisfăcând condiţia:*

(H3) *pentru orice şir* $(x_n) \subset \operatorname{dom} f$ *cu* $x_n \to x \in X$ *şi* $f(x_n) \in f(x_{n+1}) + F(x_{n+1}, x_n) + K$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *avem că* $f(x_n) \in f(x) + F(x, x_n) + K$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci pentru orice $x_0 \in \operatorname{dom} f$ *şi orice* $z^* \in K^+$ *cu* $z^* \circ f$ *mărginită inferior pe mulţimea* $\{x \in \operatorname{dom} f \mid f(x_0) \in f(x) + F(x, x_0) + K\}$*, există* $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ *astfel încât*

$$f(x_0) \in f(\overline{x}) + F(\overline{x}, x_0) + K$$

şi

$$\forall x \in \operatorname{dom} f \ : \ f(\overline{x}) \in f(x) + F(\overline{x}, x) + K \Rightarrow x = \overline{x}.$$

Are loc şi următorul rezultat.

Teorema 8 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex propriu. Presupunem că* $F : X \times X \rightrightarrows K$ *satisface condiţiile (F1), (F2) şi*

(F3) *există* $z^* \in K^+$ *astfel încât*

$$\eta(\delta) := \inf \left\{ z^*(v) \mid v \in \cup_{d(x,x')\geq\delta} F(x, x') \right\} > 0 \quad \forall \delta > 0, \tag{7}$$

iar $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *este astfel încât* z^* *(din (F3)) este mărginită inferior pe* $\Gamma(X)$*. Presupunem de asemenea că* (a) $\{x \in X \mid \Gamma(u) \subset \Gamma(x) + F(x, u)\}$ *este închisă pentru orice* $u \in X$*, şi* (b) $\Gamma(y) \subset \Gamma(x) + F(x, y)$*,* $\Gamma(z) \subset \Gamma(y) + F(y, z)$ *implică* $\Gamma(z) \subset \Gamma(x) + F(x, z)$ *pentru orice* $x, y, z \in X$*. Atunci pentru orice* $x_0 \in \operatorname{dom} \Gamma$ *există* $\overline{x} \in X$ *astfel încât* $\Gamma(x_0) \subset \Gamma(\overline{x}) + F(\overline{x}, x_0)$*, şi* $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + F(x, \overline{x}) + K$ *implică* $x = \overline{x}$.

Pentru Y spaţiu local convex separat Hausdorff, $K \subset Y$ con convex şi închis, $k^0 \in K \setminus \{0\}$, $F(x, x') := d(x, x')k^0$ pentru $x, x' \in X$, iar $\Gamma(X)$ quasi-mărginită, din rezultatul precedent se obţine [25, Cor. 3.1].

Teorema 9 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex, propriu şi închis. Presupunem că* $\emptyset \neq H \subset K$ *este convexă. Fie* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *astfel încât* $\operatorname{epi} \Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Gamma(x) + K\}$ *este închisă şi* $\Gamma(X)$ *este quasi-mărginită. Presupunem că una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) H *este mărginită, cs-completă, şi* $0 \notin \operatorname{cl}(H + K)$*;*

(ii) Y *este un spaţiu normat, iar* H *este cs-completă cu* $0 \notin \operatorname{cl} H$ *şi satisfăcând condiţia*

$$\exists \overline{y}^* \in K^+ \setminus \{0\}, \ \forall h \in H : \langle h, \overline{y}^* \rangle \geq \|h\| \, ; \tag{8}$$

(iii) Y *este un spaţiu Banach reflexiv, iar* H *este închisă cu* $0 \notin H$ *şi satisfăcând condiţia*

$$\exists \gamma > 0, \ \forall h \in H, \ \forall k \in K : \|h + k\| \geq \gamma \, \|h\| \, . \tag{9}$$

Atunci pentru orice $x_0 \in \operatorname{dom}\Gamma$ *există* $\overline{x} \in X$ *astfel încât* $\Gamma(x_0) \subset \Gamma(\overline{x}) + d(\overline{x}, x_0)H + K$ *şi* $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + d(x, \overline{x})H + K$ *implică* $x = \overline{x}$.

In teorema precedentă punctul (iii) este exact [26, Th. 3.5 (iii)], (ii) este puţin mai generală decât [26, Th. 3.5 (i)] (în care în plus Y este spaţiu Banach şi H este convexă şi închisă), iar (i) este mult mai general decât [26, Th. 3.5 (ii)] (în care în plus Y este spaţiu Banach şi H este convexă şi închisă, şi (9) are loc).

Rezultate conexe sunt conţinute în lucrările [35], [28] şi [34]. De exemplu, în [35] furnizăm contraexemple la rezultate referitoare la extinderea aplicaţiilor liniare dominate de multifuncţii convexe. Mai precis, aceste contraexemple se referă la Teoremele 2.2, 3.2 şi Corolarul 2.2 din [17], Teoremele 2.1, 3.1 din [23] şi Teorema 3.1 din [18]. In [28] se face un studiu destul de complet al funcţiei $T_v(\cdot; \Omega)$ definită prin

$$T_v(x; \Omega) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tv \in \Omega\}, \tag{10}$$

unde $\Omega \subset X$ este nevidă şi închisă, X fiind un spaţiu normat, iar $v \in X \setminus \{0\}$. Apoi proprietăţile găsite ale funcţiei $T_v(\cdot; \Omega)$ se utilizează pentru a studia un nou model pentru probleme de locaţie. In [34] se pun în evidenţă mai multe condiţii, necesare respectiv suficiente pentru ca înfăşurătoarea inferior semicontinuă a unei funcţii cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ definită pe un spaţiu Banach reflexiv să fie esenţial strict convexă. De asemenea se obţin noi rezultate referitoare la punctele cele mai apropiate (depărtate) dintr-o mulţime utilizând această abordare.

În cadrul obiectivelor *2. Regularitate metrică şi condiţii de calificare* şi *4. Condiţii de existenţă şi optimalitate pentru puncte de minim în optimizarea multicriterială,* am terminat etapa de documentare şi am obţinut mai mai multe rezultate conţinute în lucrările [1], [11], [13], [12], [14], [15] şi [8].

Menţionăm pe scurt principalele motivaţii care au stat la baza acestor studii şi cele mai importante rezultate obţinute.

Lucrarea [11] este dedicată optimizării parametrice cu restricţii de tip echilibru, acest subiect fiind în ultimele decade la originea multor eforturi îndreptate în direcţia studiului sistemelor variaţionale. Cităm aici importantele lucrări ale lui Robinson [30], Dontchev şi Rockafellar [16], Mordukhovich [27] pentru o discuţie detaliată şi pentru un istoric al acestui subiect.

Motivaţia noastră este dată de unele probleme parametrice de optimizare (în notaţiile noastre mulţimea parametrilor este P şi este iniţial considerată ca spaţiu topologic). Fie X, Y spaţii Banach. În cazul cel mai simplu al unei funcţii obiectiv parametrice cu valori scalare $f : X \times P \to \mathbb{R}$, considerăm problema

$$(P_S): \quad \min f(x, p) \text{ cu } 0 \in H(x, p),$$

unde $H : X \times P \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie ce defineşte un sistem de constrângeri generalizat prin relaţia $0 \in H(x, p)$. Multifuncţia implicită $S : P \rightrightarrows X$ asociată lui H este

$$S(p) = \{x \in X \mid 0 \in H(x, p)\}.$$

Putem înţelege conceptul de soluţie pentru (P_S) în cel puţin două moduri diferite iar ideea de studiu al condiţiilor necesare de optimalitate este aceea de a transforma problema cu restricţii într-una fără restricţii de forma $f(x, p) + Ld(x, S(p))$ sau $f(x, p) + Ld((p, x), \operatorname{Gr} S)$. In ambele cazuri. este nevoie de proprietăţi de regularitate a sistemului de constrângeri de forma 1) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d(x, S(p)) \leq rd(0, H(x, p)) \tag{11}$$

are loc pentru orice $p \in M$ şi orice x într-o vecinătate a lui $\overline{x}$ sau 2) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d((p, x), \operatorname{Gr} S) \leq rd((x, p, 0), \operatorname{Gr} H) \tag{12}$$

are loc pentru orice (x, p) într-o vecinătate a lui $(\overline{x}, \overline{p})$.

Astfel, în articolul menţionat, stabilim mai multe condiţii noi ce asigură inegalităţile (11) şi (12) cu un accent special pe cazul multifuncţiilor de tip epigraf ce sunt esenţiale în optimizare. Apoi, aplicăm aceste rezultate asupra unor probleme vectoriale specifice cu scopul de a obţine noi condiţii necesare de optimalitate.

Pentru mai multe detalii asupra tehnicilor folosite şi a rezultatelor obţinute, a se vedea lucrarea [11].

O altă lucrare ce se referă la obiectivele 2, 4 menţionate mai sus este articolul [13], care conţine un studiu motivat de importanţa mulţimilor tangente şi a proprietăţilor lor de calcul în abordarea unor probleme matematice diverse: optimizare, viabilitate sau control optimal. Capitolul 4 din cuprinzătoarea monografie [4] pune în evidenţă cu claritate această idee care reprezintă substratul motivaţional al multor articole din literatură. Punctul de plecare al lucrării noastre este observaţia că mai multe lucrări recente din literatura ultimilor ani (a se vedea, de exemplu, [24], [22]) utilizează condiţii destul de tari asupra datelor iniţiale pentru a obţine reguli de calcul pentru tangenţa generalizată. Vorbim aici despre condiţii privitoare la mai multe tipuri de compactitate generalizată a graficelor unor multifuncţii ce intervin pe parcurs, iar astfel de condiţii sunt foarte puternice în cadrul spaţiilor normate infinit dimensionale. În ceea ce ne priveşte, pentru stabilirea unor reguli de calcul pentru mulţimi tangente, preferăm să urmăm un drum iniţiat în [4, Capitolul 4] care permite utilizarea ipotezelor de regularitate metrică ce sunt mai adecvate cadrului menţionat. Unul dintre rezultatele principale obţinute este următorul.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie între spaţiile Banach X, Y şi $f : X \to X$ o funcţie. Notăm cu $F \circ f$ multifuncţia de la X la Y dată prin $(F \circ f)(x) = F(f(x))$ pentru orice $x \in X$. Prin $D_B F(\overline{x}, \overline{y})$ notăm derivata Bouligand a lui F în punctul $(\overline{x}, \overline{y})$ al graficului său.

Teorema 10 *Fie $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafic închis, $f : X \to X$ de clasă C^1 şi $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr}(F_2 \circ f)$. Presupunem că funcţia $g : (X \times Y)^2 \longrightarrow X$, $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(\alpha) - \gamma$ este metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1, f(\overline{x}), \overline{y}_2)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F_1 \times \operatorname{Gr} F_2$. Dacă F_1 este proto-diferenţiabilă în $\overline{x}$ relativ la $\overline{y}_1$ sau F_2 este proto-diferenţiabilă în $f(\overline{x})$ relativ la $\overline{y}_2$, atunci, pentru orice $u \in X$,*

$$D_B F_1(\overline{x}, \overline{y}_1)(u) + D_B F_2(f(\overline{x}), \overline{y}_2)(\nabla f(\overline{x})(u)) \subset D_B(F_1 + F_2 \circ f)(\overline{x}, \overline{y}_1 + \overline{y}_2)(u).$$

Reguli de calcul pentru coderivatele de ordinul al doilea sunt de asemenea obţinute şi apoi aplicăm aceste rezultate pentru a obţine condiţii de optimalitate pentru probleme vectoriale. Cazul multifuncţiilor parametrice este analizat separat şi, într-un caz particular, regăsim un rezultat al lui Rockafellar din lucrarea [31] (Teorema 5.4).

În lucrările [12] şi [14] am obţinut rezultate referitoare la deschiderea cu rată liniară a multifuncţiilor de tip compunere, mai întâi definite între spaţii Banach, iar mai apoi între spaţii metrice generale. Ca aplicaţii directe, se pot obţine teoreme de tip Lyusternik-Graves, atât în forma cunoscută în literatură, cât şi variante noi ale acesteia. De asemenea, se obţin ca aplicaţii teoreme de tip punct fix pentru multifuncţii, ce intră în relaţie cu rezultate foarte recente din lucrările [3], [20], [6], [7]. Regularitatea multifuncţiei soluţie asociată cu sisteme variaţionale parametrice a fost de asemenea investigată, oferindu-se condiţii suficiente care asigură proprietatea Aubin, respectiv regularitatea metrică a acesteia. Estimări precise ale modulelor de regularitate au fost precizate. Rezultatele noastre le acoperă şi le extind la cazul complet multivoc mai multe rezultate din litreratura recentă. Prezentăm pe scurt rezultatele principale.

Cel mai important rezultat, demonstrat în [12] în cadrul spaţiilor Banach (prin intermediul Principiului Variaţional Ekeland) şi extins mai apoi în [14] la spaţii metrice generale (cu o demonstraţie complet diferită, bazată pe o procedură iterativă de tip Lyusternik), este următorul.

Teorema 11 *Fie X, Y, Z, W spaţii metrice, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ şi $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in X \times Y \times Z \times W$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{z}) \in \operatorname{Gr} F_2$ şi $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w}) \in \operatorname{Gr} G$. Fie $H : X \rightrightarrows W$ definită prin*

$$H(x) := G(F_1(x), F_2(x)) \quad \forall x \in X.$$

Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:

(i) $\operatorname{Gr} F_1$, $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, $(\overline{x}, \overline{z})$, respectiv, iar $\operatorname{Gr} G$ este local închis în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$;

(ii) F_1 este deschisă cu rata liniară $L > 0$ în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{z})$ cu modulul $M > 0$;

(iv) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $C > 0$;

(v) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $D > 0$;

(vi) $LC - MD > 0$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\overline{w}, (LC - MD)\rho) \subset H(B(\overline{x}, \rho)).$$

Mai mult, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y', z', w') \in B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}, \varepsilon') \times B(\overline{z}, \varepsilon') \times B(\overline{w}, \varepsilon')$ astfel încât $(y', z') \in (F_1, F_2)(x')$ şi $w' \in G(y', z')$,

$$B(w', (LC - MD)\rho) \subset H(B(x', \rho)).$$

Drept aplicaţie a rezultatului principal, prezentat mai sus, obţinem următoarea variantă a Teoremei Lyusternik-Graves, necunoscută până acum.

Corolarul 12 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat şi $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii, $(\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2) \in X \times Y \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr} F_2$, cu $\overline{y}_1 \neq \overline{y}_2$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $\operatorname{Gr} F_1$ şi $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2)$, respectiv;

(ii) F_1 e metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ cu modulul $l > 0$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_2)$ cu modulul $m > 0$;

(iv) $lm < 1$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\|\overline{y}_1 - \overline{y}_2\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(\overline{x}, \rho)\}.$$

În plus, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y_1', y_2') \in \operatorname{Gr}(F_1, F_2) \cap [B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}_1, \varepsilon') \times B(\overline{y}_2, \varepsilon')]$,

$$B(\|y_1' - y_2'\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(x', \rho)\}.$$

O altă aplicaţie o reprezintă următoarea teoremă de punct fix pentru multifuncţii.

Teorema 13 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1 \cap \operatorname{Gr} F_2$. Presupunem că (i)-(iv) din Corolarul 12 sunt satisfăcute.*

Atunci există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B(\overline{x}, \alpha)$, avem

$$d(x, \operatorname{Fix}(F_1^{-1} F_2)) \leq (l^{-1} - m)^{-1} d(F_1(x) \cap B(\overline{y}, \beta), F_2(x)), \tag{13}$$

unde

$$\operatorname{Fix}(F_1^{-1} F_2) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset\}.$$

Considerăm $H : X \times P \rightrightarrows W$, unde X, P sunt spaţii metrice, iar W este un spaţiu normat, dată prin $H(x,p) := G(F_1(x), F_2(x,p))$, unde $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$. Asociat acestei multifuncţii, considerăm sistemul parametric $0 \in G(F_1(x), F_2(x,p))$. Multifuncţia soluţie asociată acestui sistem este $S : P \rightrightarrows X$, dată prin $S(p) := \{x \in X \mid 0 \in H(x,p)\}$. In finalul lucrării [14] am obţinut două rezultate privind regularitatea aplicaţiei multivoce S. Pentru a putea deduce astfel de teoreme, am introdus şi investigat o nouă noţiune, numită locală stabilitate la compunere, ce are drept principală aplicaţie conservarea proprietăţii Aubin la operaţia de compunere a două multifuncţii. Exemplificăm mai jos această direcţie de lucru.

Teorema 14 *Fie X, P, Y, Z spaţii metrice, W un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{y}, \overline{z}) \in X \times P \times Y \times Z$ astfel încât $\overline{y} \in F_1(\overline{x})$, $\overline{z} \in F_2(\overline{x}, \overline{p})$ şi $0 \in G(\overline{y}, \overline{z})$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $(F_1, F_2), G$ sunt local stabile la compunere în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), (\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(ii) $\operatorname{Gr} F_1$ este complet, $\operatorname{Gr}(F_2)_p$ este complet pentru orice p într-o vecinătate a lui $\overline{p}$ şi $\operatorname{Gr} G$ este închis;

(iii) F_1 e deschisă cu rată liniară în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iv) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{z})$;

(v) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vi) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vii) $\widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0) < \widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z})$.

Atunci S are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{p}, \overline{x})$. În plus, are loc relaţia

$$\operatorname{lip} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq \frac{\widehat{\operatorname{lip}}_p F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}{\widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z}) - \widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}.$$

După cum s-a observat în mai multe lucrări, dintre care amintim [9], eficienţa problemelor de optimizare vectorială este incompatibilă cu deschiderea aplicaţiei obiectiv. În acest fel, condiţiile suficiente de deschidere devin, prin negaţie, condiţii necesare pentru optimalitate. Două aspecte importante intervin în acest cadru. Primul se referă la faptul că, în locul aplicaţiei obiectiv, notată spre exemplu prin $F : X \rightrightarrows Y$, se pot considera diverse aplicaţii de tip epigraf, cu menţinerea incompatibilităţii menţionate mai sus. Acest lucru a motivat studierea, în lucrarea [8], a proprietăţilor de regularitate în jurul punctului de referinţă a multifuncţiei $\mathcal{E}_F : X \times Y \rightrightarrows Y$ dată prin

$$\mathcal{E}_F(x,k) := \begin{cases} F(x)+k, & \text{dacă } k \in K, \\ \emptyset, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde prin K am notat un con convex inclus în Y. Un al doilea aspect are în vedere faptul că incompatibilitatea optimalitate – regularitate poate include o proprietate mai slabă decât deschiderea cu rată liniară în jurul punctului, şi anume deschiderea liniară în acel punct. Acest lucru a motivat analiza în detaliu, în lucrarea [1], a regularităţilor în punct pentru aplicaţii multivoce.

Vom prezenta mai jos principalele direcţii şi rezultate din lucrarea [8]. În esenţă, pentru a deduce regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$, am urmărit abordarea bazată pe rezultate de error-bounds pentru înfăşurătoarea inferior semicontinuă a distanţei $d(\cdot, \mathcal{E}_F(\cdot,\cdot))$, ce are următoarea formă

$$\varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k),y) = \begin{cases} \liminf\limits_{u \to x} d(y, F(u)+k), & \text{dacă } k \in K, \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{14}$$

Aşa-numita 'strong slope' $|\nabla f|(x)$, introdusă de De Giorgi, Marino şi Tosques în [5] şi asociată unei funcţii inferior semicontinue f într-un punct x, este definită după cum urmează. Dacă $x \in \operatorname{dom} f := \{u \in X : f(u) < +\infty\}$, $|\nabla f|(x)$ este cantitatea definită prin $|\nabla f|(x) := 0$ dacă x este un minim local pentru f, şi prin $|\nabla f|(x) := \limsup_{y \to x, y \neq x} \frac{f(x)-f(y)}{d(x,y)}$, în rest. Pentru $x \notin \operatorname{dom} f$, definim $|\nabla f|(x) := +\infty$.

Următorul rezultat face legătura între estimarea inferioară a lui $|\nabla \varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k)$ şi regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$.

Teorema 15 *Fie X un spaţiu metric complet, Y un spaţiu Banach, K o mulţime închisă din Y şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu grafic închis. Presupunem că $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y}) \in X \times Y \times Y$ satisface $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{k} \in K$. Fie $m > 0$. Dacă există o vecinătate $U \times V \times W$ a lui $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ şi $\gamma > 0$ astfel încât*

$$|\nabla \varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k) \geq m \quad \forall (x,k,y) \in U \times V \times W \ \text{cu}\ \varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k),y) \in (0,\gamma), \tag{15}$$

atunci există o vecinătate $\tilde{U} \times \tilde{V} \times \tilde{W}$ a lui $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ astfel încât

$$d((x,k), \mathcal{E}_F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{m} d(y, F(x)+k) \quad \forall (x,k,y) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \times \tilde{W}. \tag{16}$$

Cu alte cuvinte, $\mathcal{E}_F$ este metric regulată în jurul lui $((\overline{x}, \overline{k}), \overline{y})$.

O altă teoremă dă estimări inferioare în termeni de coderivate, pe spaţii Banach, pentru $|\nabla \varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|$. În rezultatul de mai jos $K^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$ notează conul dual lui K. Coderivatele folosite, bazate pe un model axiomatic de subdiferenţială ∂ şi asociate acesteia, s-au notat prin D^*_∂.

Teorema 16 *Fie X, Y spaţii Banach, K un con convex şi închis din Y, iar F o multifuncţie cu grafic închis. Atunci pentru orice $(x, k_0, y) \in X \times K \times Y$ cu $y \notin F(x) + k_0$, avem*

$$|\nabla \varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k_0) \geq$$
$$\lim_{\rho \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^*\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \operatorname{Gr} F,\ u \in B(x,\rho), x^* \in D^*_\partial F(u,v)(y^*+z^*), \\ y^* \in K^* \cap S^*_Y,\ z^* \in \rho B^*_Y, \\ d(y, F(u)+k_0) \leq \varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k_0),y) + \rho, \\ \|y - v - k_0\| \leq d(y, F(u)+k_0) + \rho, \\ |\langle y^* + z^*, v + k_0 - y\rangle - d(y, F(u)+k_0)| < \rho \end{array} \right\} \right\}. \tag{17}$$

Combinând Teoremele 15 şi 16, deducem condiţii cu coderivate pentru regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$.

Teorema 17 *Fie X, Y spaţii Banach, K un con convex şi închis din Y, iar F o multifuncţie cu grafic închis. Presupunem că $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y}) \in X \times Y \times Y$ satisface $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{k} \in K$. Fie $m > 0$. Dacă există o vecinătate $U \times V \times W$ of $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ şi $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $(x,k,y) \in U \times [V \cap K] \times W$ cu $y \notin F(x) + k$, să avem*

$$m \leq \lim_{\rho \downarrow 0} \left\{ \inf \left\{ \|x^*\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \operatorname{Gr} F,\ u \in B(x,\rho), x^* \in D^*_\partial F(u,v)(y^*+z^*), \\ y^* \in K^* \cap S_{Y^*},\ z^* \in \rho B_{Y^*}, \\ d(y, F(u)+k) \leq \gamma + \rho, \\ \|y - v - k\| \leq d(y, F(u)+k) + \rho, \\ |\langle y^* + z^*, v + k - y\rangle - d(y, F(u)+k)| < \rho \end{array} \right\} \right\} \tag{18}$$

atunci $\mathcal{E}_F$ este metric regulată în jurul lui $((\overline{x}, \overline{k}), \overline{y})$.

Noţiunea de minim în raport cu ordinea generată de un con convex K pe Y este definită după cum urmează. Pentru o submulţime nevidă A a lui Y, un punct $\overline{y} \in A$ se numeşte minim Pareto pentru A în raport cu K (şi scriem $\overline{y} \in \operatorname{Min}(A, K)$) dacă $(A - \overline{y}) \cap (-K) \subset K$. În cazul în care conul este solid (i.e., are interior nevid), un punct $\overline{y} \in A$ se numeşte minim Pareto pentru A în raport cu K (şi scriem $\overline{y} \in \operatorname{WMin}(A, K)$) dacă $(A - \overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset$.

Raportat la problema de optimizare

$$(P_1) \quad \operatorname{Min} F(x) \text{ pentru } x \in X,$$

un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte minim Pareto local dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât $\overline{y} \in \operatorname{Min}(F(U), K)$.

Rezultatul următor, ce exploatează incompatibilitatea dintre minimalitatea Pareto a unui punct $(\overline{x}, \overline{y})$ şi deschiderea lui $\mathcal{E}_F$ în $((\overline{x}, 0), \overline{y})$, furnizează condiţii necesare de optimalitate pentru problema (P_1).

Teorema 18 *Fie X, Y spaţii Banach şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu grafic închis astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Presupunem că $K \subset Y$ este un con convex închis astfel încât $K \setminus (-K) \neq \emptyset$. Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este un minim Pareto local pentru (P_1), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \operatorname{Gr} F \cap B((\overline{x}, \overline{y}), \varepsilon)$, $y_\varepsilon^* \in S_{Y^*} \cap K^*$, $z_\varepsilon^* \in \varepsilon B_{Y^*}$, astfel încât*

$$0 \in D_\partial^* F(u_\varepsilon, v_\varepsilon)(y_\varepsilon^* + z_\varepsilon^*) + \varepsilon B_{X^*}.$$

După cum spuneam mai sus, lucrarea [1] a fost dedicată analizei regularităţilor în punct pentru aplicaţii multivoce. S-au clasificat regularităţile în punct (sau subregularităţile) pentru multifuncţii în două categorii: în prima categorie am inclus deschiderea liniară în punct, proprietatea de pseudocalm şi cea de hemiregularitate metrică, iar în cea de a doua categorie am încadrat pseudo-deschiderea cu rată liniară, proprietatea de calm şi subregularitatea metrică; s-au arătat rezultate ce fac legăturile între cele două triplete şi s-a analizat cazul operatorilor liniari. Restul lucrării a fost împărţit după cum urmează:

- am arătat teoreme de tip multifuncţii implicite ce folosesc regularităţi în punct de al doilea tip;
- am studiat sisteme variaţionale parametrice în contextul regularităţilor în punct de tip II;
- am formulat condiţii de optimalitate pentru probleme de optimizare vectorială multivocă solidă (i.e., conul de ordonare are interior nevid).

Prezentăm în continuare rezultatele principale din această lucrare.

După cum am menţionat anterior, dată o multifuncţie $H : X \times P \rightrightarrows Y$, putem defini multifuncţia implicită $S : P \rightrightarrows X$ prin $S(p) := \{x \in X \mid 0 \in H(x, p)\}$.

Teorema 19 *Fie X, P spaţii metrice, Y un spaţiu normat, $H : X \times P \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x}, \overline{p}, 0) \in \operatorname{Gr} H$. Notăm $H_p(\cdot) := H(\cdot, p)$, $H_x(\cdot) := H(x, \cdot)$.*

(i) Dacă $H_{\overline{p}}$ este pseudo-deschisă cu rată liniară de modul $c > 0$ în $(\overline{x}, 0)$, atunci există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B(\overline{x}, \alpha)$,

$$d(x, S(\overline{p})) \leq c^{-1} d(0, H(x, \overline{p}) \cap B(0, \beta)). \tag{19}$$

Dacă, în plus, H este calmă în raport cu p uniform în x în $((\overline{x}, \overline{p}), 0)$, atunci S este calmă în $(\overline{p}, \overline{x})$ şi

$$\operatorname{clm} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq c^{-1} \widehat{\operatorname{clm}}_p H((\overline{x}, \overline{p}), 0). \tag{20}$$

(ii) Dacă $H_{\overline{x}}$ este pseudo-deschisă cu rată liniară de modul $c > 0$ în $(\overline{p}, 0)$, atunci există $\gamma, \delta > 0$ astfel încât, pentru orice $p \in B(\overline{p}, \gamma)$,

$$d(p, S^{-1}(\overline{x})) \leq c^{-1} d(0, H(\overline{x}, p) \cap B(0, \delta)). \tag{21}$$

Dacă, în plus, H este calmă în raport cu x uniform în p at $((\overline{x}, \overline{p}), 0)$, atunci S metric subregulată în $(\overline{p}, \overline{x})$ şi

$$\operatorname{subreg} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq c^{-1} \widehat{\operatorname{clm}}_x H((\overline{x}, \overline{p}), 0). \tag{22}$$

În cazul în care H ia forma $H(x,p) := F(x,p) + G(x)$, au fost analizate regularităţile în jurul punctului ale multifuncţiei soluţie asociată sistemelor variaţionale parametrice în lucrările [2], [10]. În [1] am formulat condiţii ce asigură subregularitatea metrică şi proprietatea de calm a lui S. Menţionăm primul dintre acestea.

Teorema 20 *Fie X, Y, P spaţii Banach, $F : X \times P \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{y}) \in X \times P \times Y$ astfel încât $\overline{y} \in F(\overline{x}, \overline{p})$ şi $-\overline{y} \in G(\overline{x})$. Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:*
(i) F, G sunt local stabile la sumă în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}, -\overline{y})$;
(ii) F este calmă în raport cu x uniform în p în $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y})$;
(iii) $F_{\overline{x}}$ este metric regulată în jurul lui $(\overline{p}, \overline{y})$;
(iv) G este calmă în $(\overline{x}, -\overline{y})$.
Atunci S este metric subregulată în $(\overline{p}, \overline{x})$. În plus, are loc relaţia:

$$\operatorname{subreg} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq \operatorname{reg} F_{\overline{x}}(\overline{p}, \overline{y}) \cdot [\widehat{\operatorname{clm}}_x F((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) + \operatorname{clm} G(\overline{x}, -\overline{y})]. \tag{23}$$

Fie funcţia $f : X \to Y$, multifuncţia $G : X \rightrightarrows Z$ şi problema de programare vectorială

$$(P_2) \quad \min f(x), \text{ pentru } x \in X, \ 0 \in G(x) + Q.$$

Q notează un con convex din Z. Ne-a interesat formularea de condiţii necesare pentru ca un punct $\overline{x} \in X$ să fie minim Pareto slab pentru problema (P_2) în raport cu un con convex $K \subset Y$, ceea ce ar însemna că $f(\overline{x}) \in \operatorname{WMin}(f(G^{-1}(-Q)), K)$. În acest sens, am considerat multifuncţia epigraf asociată lui G şi conului Q dată de formula (14) şi am furnizat condiţii suficiente în termeni de coderivate (Fréchet) pentru subregularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_G$.

De asemenea, analizând cazul solid, a fost utilă considerarea funţionalei de scalarizare Gesterwitz-Iwanov, dată în felul următor: pentru $e \in \operatorname{int} K$, definim $s_e : Y \to \mathbb{R}$ prin $s_e(z) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda e \in z + K\}$. După cum se cunoaşte, s_e este $d(e, \operatorname{bd}(K))^{-1}$-Lipschitz. Vom nota mai jos $d(e, \operatorname{bd}(K))^{-1}$ prin L_e (constanta Lipschitz pentru s_e). Rezultatele principale pe care le-am obţinut sunt următoarele.

Teorema 21 *Presupunem că $\overline{x} \in G^{-1}(-Q)$ este un punct de minim slab Pareto pentru (P_2). Fixăm şi notăm cu $\overline{q}$ un punct în Q astfel încât $(\overline{x}, \overline{q}, 0) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$. Dacă f este $L-$Lipschitz $(L > 0)$ şi $\mathcal{E}_G$ este metric subregulată în $((\overline{x}, \overline{q}), 0)$ (cu modulul mai mare decât $M > 0$) atunci, pentru orice $e \in \operatorname{int} K$, $(\overline{x}, \overline{q}, 0)$ este un minim local pentru funcţia scalară*

$$(x, q, z) \longmapsto s_e \circ (f(x) - f(\overline{x})) + LL_eM \|z\|$$

cu restricţia $(x, q, z) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$.

Teorema 22 *Fie X, Y, Z spaţii Asplund şi $\overline{x} \in G^{-1}(-Q)$ un minim Pareto slab pentru problema (P). Fie $\overline{q} \in Q$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{q}, 0) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$. Presupunem că*
(i) f este $L-$Lipschitz $(L > 0)$ şi strict Lipschitz în $\overline{x}$;
(ii) G are grafic închis;
(iii) $\mathcal{E}_G$ este metric subregulată în $((\overline{x}, \overline{q}), 0)$ (cu o constantă mai mică decât $M > 0$).
Atunci, pentru orice $e \in \operatorname{int} K$, există $y^* \in K^*$, $y^*(e) = 1$, $z^* \in Z^*$, $\|z^*\| \leq LL_eM$ astfel încât

$$(0, 0) \in \partial(y^* \circ f)(\overline{x}) \times \{0\} + D^*\mathcal{E}_G(\overline{x}, \overline{q}, 0)(z^*).$$

Lucrarea [15] pleacă de la observaţia că în ultimii ani literatura dedicată condiţiilor de optimalitate pentru minimalitatea Pareto tare folosind diferenţiabilitatea generalizată s-a dezvoltat foarte mult. Este ştiut faptul că abordarea cazului în care interiorul conului de ordonare este vid este o problemă dificilă, iar ceea ce ne-am propus în lucrarea menţiontă a fost să reconsiderăm unele tehnici de scalarizare şi într-un context în care acestea nu au mai fost utilizate. Ne ocupăm astfel de minimalitate Pareto atât în cazul pur geometric cât şi în cazul problemolor cu restricţii cu date netede.

In cazul geometric, am abordat problema evitării unor condiţii destul de tari ce apar în literatura de specialitate şi care se referă la închiderea înfăşurătoarei conice a unor sume de mulţimi. Unul dintre rezultatele obţinute, pe baza unei teoreme auxiliare ce se referă la caracterizări ale mulţimilor ce admit înfăşurătoare conică închisă este prezentat mai jos.

Propoziţia 23 *Fie Y un spaţiu normat, $M \subset Y$ şi C un con convex închis şi punctat. Presupunem că $\overline{y} \in M$ este minim Pareto pentru M în raport cu conul C iar M este local închisă în $\overline{y}$. In plus, considerăm o subdifferenţială abstractă ∂ având proprietăţi naturale minimale. Atunci pentru orice $c^0 \in C \setminus \{0\}$, există $\varepsilon > 0$ şi $y^* \in Y^*$, $y^*(c^0) = 1$ astfel încât*

$$-y^* \in N_\partial \left(\mathrm{cone}(M \cap D(\overline{y}, \varepsilon) - \overline{y} + c^0), 0\right).$$

In lucrare, legat de această problematică, sunt descrise condiţii pentru ca multiplicatorul y^* din rezultatul anterior să fie pozitiv (i.e., $y^* \in C^*$).

Cazul funcţional are în vedere studiul problemei vectoriale cu restricţii

$$(P) \qquad \min f(x), \text{ subject to } g_i(x) \le 0,\ i \in \overline{1,m}, \quad h_j(x) = 0,\ j \in \overline{1,k},$$

unde X, Y sunt spaţii Banach, $f : X \to Y$ este o funcţie vactorială iar $(g_i)_{i\in\overline{1,m}}, (h_j)_{j\in\overline{1,k}} : X \to \mathbb{R}$ sunt funcţii scalare. Pentru uşurinţa expunerii considerăm doar cazul datelor netede (toate funcţiile sunt de clasă C^1). Rezultatul principal al acestei secţiuni utilizează mai mulţi paşi intermediari ce au drept obiect obţinerea unor condiţii de tip Karush-Kuhn-Tucker prin intermediul unor reguli de calcul proprii subdifferenţialei Michel-Penot şi deducerea unor condiţii necesare de optimalitate pentru soluţii aproximative. Astfel, rezultatul principal menţionat vizează un proces de trecere la limită în cadrul condiţiilor anterior obţinute. Descriem acest mecanism şi rezultatul în cauză în cele ce urmează.

Spunem că C (con convex închis şi punctat) este topologic normal compact (pe scurt, (TNC)) în 0 dacă are loc următoare proprietate a şirurilor generalizate din C^*

$$\left[(x_\alpha^*) \subset C^*, x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} 0\right] \Rightarrow x_\alpha^* \to 0.$$

In schimb, conul C se numeşte secvenţial normal compact (pe scurt, (SNC)) în 0 dacă are loc următoare proprietate a şirurilor din C^*

$$\left[(y_n^*) \subset C^*, y_n^* \xrightarrow{w^*} 0\right] \Rightarrow y_n^* \to 0,$$

Evident, (TNC) implică (SNC), dar reciproca nu este în general adevărată.

Teorema 24 *Presupunem că are loc condiţia de calificare Mangasarian-Fromovitz în $\overline{x}$ care este punct de minim Pareto pentru (P). In oricare din următoarele situaţii:*

(a) bila unitate închisă din Y^* este w^*-secvenţial compactă şi C este (SNC) în 0;

(b) C este (TNC) în 0;

are loc următoarea concluzie: pentru orice $e \in C$, $\|e\| = 1$ există $y^* \in C^* \setminus \{0\}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$, $\forall i \in \overline{1,m}$ şi

$$y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^k \mu_i \nabla h_j(\overline{x}) = 0.$$

Bibliografie

[1] M. Apetrii, M. Durea, R. Strugariu, *On subregularity properties of set-valued mappings,* Set-Valued and Variational Analysis, 21 (2013), 93–126.

[2] F.J. Aragon Artacho, B.S. Mordukhovich, *Metric regularity and Lipscithian stability of parametric variational systems*, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 1149–1170.

[3] A.V. Arutyunov, *Stability of coincidence points and properties of covering mappings,* Mathematical Notes, 86 (2009), 153–158.

[4] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued Analysis*, Birkäuser, Basel, 1990.

[5] E. De Giorgi, A. Marino, M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti. Accad. Naz. Lincei rend. Cl. Sci. fis. Mat. Natur., 68 (1980), 180–187.

[6] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (2011), 521–534.

[7] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points II*, Journal of Convex Analysis, appeared online.

[8] M. Durea, H. T. Nguyen, R. Strugariu, *Metric regularity of epigraphical multivalued mappings and applications to vector optimization*, Mathematical Programming, Serie B, 139 (2013), 139–159.

[9] M. Durea, R. Strugariu, *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, 60 (2011), 575–591.

[10] M. Durea, R. Strugariu, *Openness stability and implicit multifunction theorems: Applications to variational systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75 (2012), 1246–1259.

[11] M. Durea, R. Strugariu, *On parametric vector optimization via metric regularity of constraint systems*, Mathematical Methods of Operations Research, 74 (2011), 409–425.

[12] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in general Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), 899–913.

[13] M. Durea, R. Strugariu, *Calculus of tangent sets and derivatives of set-valued maps under metric subregularity conditions*, Journal of Global Optimization, 56 (2013), 587–603.

[14] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in metric spaces and applications*, Mathematical Programming Serie A, DOI: 10.1007/s10107-012-0598-8.

[15] M. Durea, R. Strugariu, Chr. Tammer, *Scalarization in geometric and functional vector optimization revisited*, Journal of Optimization Theory and Applications, DOI: 10.1007/s10957-013-0360-2.

[16] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings*, Springer, Berlin, 2009.

[17] W.-S. Du, *The extension of continuity and generalized results for set-valued maps in convex analysis*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 3176–3184.

[18] X.L. Guo, S.J. Li, K.L. Teo, *Subdifferential and optimality conditions for the difference of set-valued mappings*, Positivity 16 (2012), 321–337.

[19] A. Hamel, *Remarks to an equivalent formulation of Ekeland's variational principle*, Optimization 31 (1994), 233–238.

[20] A.D. Ioffe, *Towards variational analysis in metric spaces: metric regularity and fixed points*, Mathematical Programming, Serie B, 123 (2010), 241–252.

[21] A. A. Khan, Chr. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued Optimization - An Introduction with Applications,* Springer, Berlin (va apare).

[22] S. J. Li, C. M. Liao, *Second-order differentiability of generalized perturbation maps*, Journal of Global Optimization, published online, DOI: 10.1007/s10898-011-9661-x

[23] S.J. Li, X.L. Guo, *Weak subdifferential for set-valued mappings and its applications*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 5781–5789.

[24] S. J. Li, K. W. Meng, J.-P. Penot, *Calculus rules for derivatives of multimaps*, Set-Valued Analysis, 17 (2009), 21–39.

[25] L.J. Lin, C.S. Chuang, Existence theorems for variational inclusion problems and the set-valued vector Ekeland variational principle in a complete metric space, Nonlinear Anal. 70 (2009), 2665–2672.

[26] C. G. Liu, K. F. Ng, *Ekeland's variational principle for set-valued functions*, SIAM J. Optim. 21 (2011), 41–56.

[27] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 330 and 331, Berlin, 2006.

[28] N. M. Nam, C. Zălinescu, *Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems*, Set-Valued Var. Anal., 21 (2013), 405–430.

[29] Qiu, J.H.: Set-valued quasi-metrics and a general Ekeland's variational principle in vector optimization, SIAM J. Control Optim. 51 (2013), no. 2, 1350–1371.

[30] S.M. Robinson, *Strongly regular generalized equations*, Mathematics of Operations Research, 5 (1980), 43–62.

[31] R. T. Rockafellar, *Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization*, Ann. Inst. H. Poincaré, 6 (1989), 449–482.

[32] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, in "Fixed point theory and applications (Marseille, 1989)", 397–406, Pitman Res. Notes Math. Ser., 252, 1991.

[33] Chr. Tammer, C. Zălinescu, *Vector variational principles for set-valued functions*, Optimization 60 (2011), 839–857.

[34] M. Volle, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Zălinescu, *When some variational properties force convexity*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 19 (2013), 701–709.

[35] C. Zălinescu, *On some extension theorems for set-valued mappings*, Nonlinear Analysis, 88 (2013), 24–26.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu