Raport ştiinţific
privind implementarea proiectului în perioada ianuarie – decembrie 2014
a contractului de cercetare

Regularitate şi senzitivitate în optimizarea multicriterială

PN-II-ID-PCE-2011-3-0084, nr. 239/05.10.2011

În legătură cu obiectivele propuse pentru perioada ianuarie – decembrie 2014, în lucrarea [1] studiem o nouă metodă de a penaliza problemele de optimizare scalară vectorială, prin intermediul unei funcţii cunoscută în literatură ca funcţia timp minimal direcţională, ale cărei proprietăţi au fost analizate în mod sistematic în lucrarea [7].

Merită menţionat faptul că există deja două metode clasice de a penaliza problemele de optimizare. Dacă se notează cu M mulţimea punctelor admisibile (mulţimea restricţiilor), o primă metodă, directă, este aşa-numita "penalizare infinită", unde termenul de penalizare este dat de funcţia indicatoare a mulţimii M : $i_M(x) = 0$ dacă $x \in M$ şi $i_M(x) = \infty$, dacă $x \notin M$. Cealaltă metodă clasică de penalizare îi aparţine lui Clarke (vezi [2, Proposition 2.4.3]) şi foloseşte funcţia distanţă asociată mulţimii M. Această abordare a fost recent extinsă la optimizarea vectorială în [9]. Comparativ cu aceste două metode, termenul de penalizare propus de noi, dat de funcţia timp minimal direcţională, este unul hibrid, deoarece în afara mulţimii M poate lua valori în $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Arătăm în lucrare că această funcţie este potrivită pentru a penaliza principalele tipuri de probleme cu restricţii geometrice: problemele scalare şi vectoriale cu conuri de ordonare solide şi nonsolide. De asemenea, folosim obiectele de diferenţiere generalizată de tip Mordukhovich în formularea unor condiţii necesare de optimalitate pentru punctele de minim Pareto asociate unei probleme unde funcţia obiectiv este direcţional Lipschitz.

Prezentăm în continuare, pe scurt, principalele rezultate. Reamintim că, dacă X este un spaţiu liniar normat, $u \in X \setminus \{0\}$ este un element, iar $\emptyset \neq M \subset X$ este o mulţime închisă, definim funcţia timp minimal direcţională prin $T_u(\cdot, M) : X \to [0, \infty]$,

$$T_u(x, M) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tu \in M\}, \tag{1}$$

cu convenţia $\inf \emptyset = +\infty$.

Fie problema de optimizare scalară

$$(\mathcal{P}_s) \;\; \min s(x) \text{ a.î. } x \in M.,$$

unde $s : X \to R \cup \{+\infty\}$.

Următoarea teoremă arată că funcţia $T_u(\cdot, M)$ furnizează un termen exact de penalizare pentru (P_s).

Teorema 1 *Presupunem că $s : X \to R \cup \{+\infty\}$ este local Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$ relativ la domeniul său cu constanta $L > 0$ şi $\overline{x} \in M \cap \operatorname{dom} s$ este o soluţie locală pentru (P_s). Atunci pentru orice $u \in X \setminus \{0\}$, $\overline{x}$ este un minim local (fără restricţii) al funcţiei $s + L \|u\| T_u(\cdot, M)$.*

Trecând la cazul vectorial, considerăm Y, un spaţiu liniar normat, parţial ordonat de un con convex, închis, propriu şi punctat K. Pentru a acoperi cât mai multe situaţii, facem câteva convenţii naturale legate de multiplicarea între $\pm\infty$ şi elementele nenule din K. În plus, deoarece dorim să acoperim cazul funcţiilor cu valori reale extinse, îi adăugăm lui Y două elemente abstracte şi distincte $-\infty_K, +\infty_K$, care nu sunt din Y, şi notăm $\overline{Y} := Y \cup \{-\infty_K, +\infty_K\}$. Regulile de ordine şi algebrice de care avem nevoie pentru aceste două elemente sunt cele uzuale.

Fie funcţia $v : X \to Y \cup \{+\infty_K\}$ şi $M \subset \operatorname{dom} v := \{x \in X \mid v(x) \in Y\}$ o mulţime închisă. Atunci considerăm problema generală de optimizare vectorială

$$(\mathcal{P}_v) \;\; \min v(x) \text{ a.î. } x \in M,$$

unde minimul este luat în sensul clasic (slab sau tare) Pareto. Reamintim că un punct admisibil $\overline{x}$ se numeşte minim local slab Pareto pentru (P_v) dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ şi există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice punct admisibil x din V, are loc $v(x) - v(\overline{x}) \notin -\operatorname{int} K$. De asemenea, un punct admisibil $\overline{x}$ se numeşte minim local Pareto pentru (P_v) dacă există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice punct admisibil x din V, are loc $v(x) - v(\overline{x}) \notin -K \setminus \{0\}$ (această ultimă noţiune operează şi în cazul în care $\operatorname{int} K = \emptyset$). În variantele globale ale definiţiilor de mai sus se înlocuieşte V cu X.

De asemenea, spunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L>0$ pe o mulţime $S \subset X$ dacă există un element $e \in K \setminus \{0\}$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in S$

$$v(x'') + L\,\|x'' - x'\|\,e - v(x') \in K.$$

Au loc următoarele rezultate.

Teorema 2 *În notaţiile de mai sus, presupunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L>0$ pe X şi fie $e \in K \setminus \{0\}$ elementul dat de această condiţie. Fie $u \in X \setminus \{0\}$.*

(i) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim local slab Pareto pentru (P_v), atunci este un minim local slab Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L\,\|u\|\,T_u(\cdot, M)e$.

(ii) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim global slab Pareto pentru (P_v), atunci este un minim global slab Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L\,\|u\|\,T_u(\cdot, M)e$.

Teorema 3 *În notaţiile de mai sus, presupunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L>0$ pe X şi fie $e \in K \setminus \{0\}$ elementul dat de această condiţie. Fie $u \in X \setminus \{0\}$.*

(i) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim local Pareto pentru (P_v), atunci este un minim local Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L'\,\|u\|\,T_u(\cdot, M)e$ pentru orice $L' > L$.

(ii) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim global Pareto pentru (P_v), atunci este un minim global Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L'\,\|u\|\,T_u(\cdot, M)e$ pentru orice $L' > L$.

Pentru formularea condiţiilor necesare de optimalitate, folosim, după cum am menţionat mai sus, obiecte de diferenţiere generalizată de tip Mordukhovich. De asemenea, exploatăm un principiu ce asertează incompatibilitatea dintre optimalitate şi deschiderea unei multifuncţii de tip epigraf asociată unei probleme de optimizare vectorială (vezi [3]), precum şi o teoremă ce conţine condiţii suficiente în termenii coderivatelor Fréchet pentru deschiderea liniară a sumei a două multifuncţii (vezi [4]).

Principalul rezultat legat de condiţii de optimalitate în cazul problemelor vectoriale cu restricţii geometrice este prezentat în continuare. O mulţime $M \subset X$ se numeşte epi-Lipschitz în $\overline{x} \in X$ în direcţia $u \neq 0$ dacă există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $\omega \in M \cap B(\overline{x}, \delta)$, $z \in B(u, \delta)$ şi $\lambda \in [0, \delta]$, are loc $\omega + \lambda z \in M$.

Teorema 4 *Fie X şi Y spaţii Asplund. Considerăm problema (P_v) şi presupunem că $\overline{x} \in M$ este un minim Pareto local pentru (P_v). De asemenea, presupunem că:*

(i) v este $K-$Lipschitz de rang $L>0$ pe X, iar $e \in K \setminus \{0\}$ este elementul dat de această condiţie Lipschitz;

(ii) există un $u \in X \setminus \{0\}$ astfel încât M este epi-Lipschitz în $\overline{x}$ în direcţia u;

(iii) K este (SNC) în 0

Atunci pentru orice $L' > L$, există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi $x^* \in D^*v(\overline{x})(y^*)$ astfel încât

$$-x^* \in N(M, \overline{x}),$$

şi

$$x^*(u) \leq L'\,\|u\|\,y^*(e).$$

În lucrarea [10], pe lângă alte rezultate, punem în evidenţă şi utilizarea quasi-interiorului (relativ) al unei mulţimi convexe în obţinerea unor condiţii de optimalitate şi dualitate în optimizarea vectorială. Începem prin a aminti câteva noţiuni de eficienţă (minimalitate) în raport cu ordinea indusă de un con convex punctat $C \subset Y$, unde Y este un spaţiu local convex. Fie $\emptyset \neq E \subset Y$; considerăm mulţimile

$$\begin{aligned}
\mathrm{Min}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-C) = \{0\}\},\\
\mathrm{WMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset\} \quad (\text{când } \operatorname{int} C \neq \emptyset),\\
\mathrm{BMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+ (E + C - a)) \cap (-C) = \{0\}\},\\
\mathrm{QMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-\operatorname{qri} C) = \emptyset\} \quad (\text{când } \operatorname{qri} C \neq \emptyset).
\end{aligned}$$

Amintim că pentru o mulţime convexă nevidă $A \subset Y$, $\operatorname{qri} A := \{a \in A \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+(A - a)) \text{ este spaţiu liniar}\}$, iar $\operatorname{qi} A := \{a \in A \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+(A - a)) = Y\}$. Când C are o bază B, adică $B \subset C$ este o mulţime convexă astfel încât $0 \notin \operatorname{cl} B$ şi $C = \mathbb{R}_+ B$, definim

$$\mathrm{HMin}(E, B) := \cup\{\mathrm{Min}(E, \mathbb{R}_+(B + U)) \mid U \in \mathcal{N}_Y^c,\ (2U) \cap B = \emptyset\},$$

unde $\mathcal{N}_Y^c$ este clasa vecinătăţilor deschise, convexe şi simetrice ale lui $0 \in Y$; este clar că pentru $U \in \mathcal{N}_Y^c$ cu $(2U) \cap B = \emptyset$ avem că $Q := \mathbb{R}_+(B + U)$ este un con convex punctat cu $\operatorname{int} Q = \mathbb{P}(B + U)$. Este (aproape) evident că $\operatorname{HMin}(E, B) \subset \operatorname{Min}(E, C)$.

Dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ atunci $\operatorname{Min}(E, C) \subset \operatorname{WMin}(E, C) = \operatorname{QMin}(E, C)$. Presupunând că $0 \notin \operatorname{qri} C \neq \emptyset$, avem că $\operatorname{Min}(E, C) \subset \operatorname{QMin}(E, C)$; totuşi, dacă $0 \in \operatorname{qri} C$ atunci $\operatorname{qri} C = C$ şi $\operatorname{QMin}(E, C) = \emptyset$. De fapt $0 \in \operatorname{qri} C \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{qri}(\operatorname{cl} C) \Leftrightarrow \operatorname{cl} C$ este spaţiu liniar $\Leftrightarrow C^+$ este a spaţiu liniar (şi $0 \in \operatorname{qi} C \Leftrightarrow \operatorname{cl} C = X \Leftrightarrow C^+ = \{0\}$). Luând în considerare observaţiile precedente, în cele ce urmează presupunem că $0 \notin \operatorname{qri} C$. In plus, este evident că $\operatorname{BMin}(E, C) \subset \operatorname{Min}(E, C)$.

După cum se ştie, $\operatorname{Max}(E, C) := \operatorname{Min}(E, -C)$, şi similar pentru celelalte noţiuni Max.

Considerăm acum $F : S \rightrightarrows Y$ şi $G : S \rightrightarrows Z$ două multifuncţii cu $\emptyset \neq S = \operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G$, unde Y, Z sunt spaţii local convexe separate Hausdorff, ordonate de conurile convexe C, respectiv K. Considerăm problema de minimizare

(VP) $C\text{-}\min_{x \in M} F(x)$,

unde $M := \{x \in S \mid G(x) \cap (-K) \neq \emptyset\}$; desigur, $G(x) \cap (-K) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in G(x) + K$.

Fie $x_0 \in M$ şi $y_0 \in F(x_0)$. Spunem că (x_0, y_0) este soluţie (resp. soluţie slabă, quasi-slabă) a lui (VP) dacă $y_0 \in \operatorname{Min}(F(M), C)$ (resp. $y_0 \in \operatorname{WMin}(F(M), C)$, $y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C)$). Noţiunea de soluţie quasi-slabă a fost introdusă în [8, Def. 2.17] (cu acelaşi nume) în cazul în care $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi în [11].

In spiritul tezei lui T.N. Tasset [8], considerăm mulţimea

$$\mathcal{E} := (F \times G)(S) + C \times K,$$

unde $F \times G : S \rightrightarrows Y \times Z$, $(F \times G)(x) := F(x) \times G(x)$ pentru $x \in S$. Desigur, $F \times G$ este convexlike atunci când $\mathcal{E}$ este convexă. Deoarece $G(S) + K = \operatorname{Pr}_Z(\mathcal{E})$, $G(S) + K$ este convexă dacă $\mathcal{E}$ este convexă. Observăm că $F \times G$ este $C \times K$-convexă (şi deci $\mathcal{E}$ este convexă) atunci când S este o submulţime convexă a unui spaţiu liniar, F este C-convexă şi G este K-convexă.

Rezultatul următor corespunde celui din [8, Th. 3.3].

Propoziţia 5 *Fie $F \times G$ convexlike. Presupunem că* (a) $x_0 \in M$ *şi* $y_0 \in F(x_0)$, (b) $(y_0, 0) \notin \operatorname{qi} \mathcal{E}$ *şi* (c) $0 \in \operatorname{qi}(G(S) + K)$. *Atunci* (d) *există $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$ şi $z^* \in K^+$ astfel încât $\langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle y_0, y^* \rangle$ pentru orice $(y, z) \in (F \times G)(S)$.*

Invers, presupunem că (a) *şi* (d) *sunt verificate. Atunci au loc* (b) *şi* (e) $z^*\big(G(x_0) \cap (-K)\big) = \{0\}$*; în plus, dacă $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ atunci au loc* (b') $(y_0, 0) \notin \operatorname{qri} \mathcal{E}$ *şi* (f) $y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C)$, *adică (x_0, y_0) este o soluţie quasi-slabă pentru (VP).*

Condition (c) în Propoziţia 5 este mai slabă, atunci când G este convexlike, decât condiţia de tip Slater (c') $G(\overline{x}) \cap (-\operatorname{qi} K) \neq \emptyset$ pentru un $\overline{x} \in S$; într-adevăr, $G(S) + K$ fiind convexă,

$$0 \in G(\overline{x}) + \operatorname{qi} K \subset (G(S) + K) + \operatorname{qi} K \subset \operatorname{qi}(G(S) + K + K) = \operatorname{qi}(G(S) + K).$$

Observaţia 6 Teorema 3.3 din [8] stabileşte că (a) $\wedge$ (b') $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\wedge$ (e) atunci când F este C-convexă, G este K-convexă şi $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$; [8, Cor. 3.4] este [8, Th. 3.3] în care (c) este înlocuit prin (c'). Notăm de asemenea că în cazul în care $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$ avem că $\overline{\operatorname{aff}} \mathcal{E} = Y \times Z$, şi astfel $\operatorname{qri} \mathcal{E} = \operatorname{qi} \mathcal{E}$.

Rezultatul următor corespond celui din [8, Th. 3.7]; aici $L^+(Z, Y) := \{T \in L(Z, Y) \mid T(K) \subset C\}$.

Propoziţia 7 *Fie $F \times G$ convexlike şi fie $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$. Presupunem că* (a) *şi* (d) *din Propoziţia 5 au loc. Atunci există $T \in L^+(Z, Y)$ astfel încât $y_0 \in \operatorname{QMin}((F + T \circ G)(S), C)$ şi $T(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}$.*

Observaţia 8 Teorema 3.7 din [8] stabileşte că are loc concluzia Propoziţiei 7 atunci când F este C-convexă, G este K-convexă, $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi (a), (f), (b'), (c) sunt verificate; după cum se vede din Propoziţia 5, condiţia (f) poate fi transferată de la ipoteză la concluzia Teoremei 3.7 din [8].

Ca în [8], problemei (VP) îi asociem multifuncţia Lagrange

$$\mathcal{L} : S \times L^+ \rightrightarrows Y, \quad \mathcal{L}(x, T) := F(x) + T(G(x)),$$

unde $L^+ := L^+(Z, Y)$, şi multifuncţia obiectiv duală

$$\Psi : L^+ \rightrightarrows Y, \quad \Psi(T) := \operatorname{QMin}(L(\cdot, T)(S), C).$$

Corolarul 9 *Fie* $F \times G$ *convexlike şi fie* $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$. *Presupunem că* (a), (b) *şi* (c) *din Propoziţia 5 sunt îndeplinite. Atunci*

$$y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C) \cap \operatorname{QMax}\left(\Psi(L^+), C\right).$$

Observaţia 10 Teorema 3.10 din [8] stabileşte că $y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C)$ dacă şi numai dacă $y_0 \in \operatorname{QMax}(\Psi(L^+), C)$ atunci când F este C-convexă, G este K-convexă, $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi (a), (b'), (c) sunt verificate; concluzia Teoremei 3.10 din [8] este mult mai slabă decât cea a Corolarului 9. Observăm de asemenea că concluzia $\overline{y} \in \operatorname{QMin}(F(x_0), C)$ a Teoremei 3.9 din [8] (pentru $x_0 \in M$ şi $\overline{y} \in \Psi(L^+)$) nu este corectă deoarece $\overline{y}$ nu este în mod necesar în $F(x_0)$; relaţia corectă de dualitate slabă este

$$\left(F(M) - \psi(L^+)\right) \cap (-\operatorname{qi} C) = \emptyset.$$

Rezultatele menţionate mai sus pot fi utilizate pentru studierea punctelor eficiente în sens Henig, adică elementele mulţimii $\operatorname{HMin}(F(M), B)$, în cazul în care B este o bază a lui C. In această situaţie luând $C_U^B := \mathbb{R}_+(B + U)$ cu $U \in \mathcal{N}_Y^c$, $(2U) \cap B = \emptyset$, avem că $\operatorname{qi} C_U^B = \operatorname{int} C_U^B = C_U^B \setminus \{0\}$ şi

$$(C_U^B)^+ = \{y^* \in Y^* \mid \inf y^*(B) \geq 2 \sup y^*(U)\} \subset \{0\} \cup C_B^\triangle,$$

unde

$$C_B^\triangle := \{y^* \in Y^* \mid \inf y^*(B) > 0\} \subset C^\#.$$

Fie

$$\mathcal{E}_U^B := (F \times G)(S) + C_U^B \times K.$$

Deoarece $C \times K \subset C_U^B \times K$, $F \times G$ este $C_U^B \times K$-convexlike dacă $F \times G$ este $C \times K$-convexlike.

Rezultatul următor corespunde celui din [8, Th. 4.3].

Propoziţia 11 *Fie* $F \times G$ $C \times K$*-convexlike şi* B *o bază a lui* C. *Presupunem că* (a) $x_0 \in M$ *şi* $y_0 \in F(x_0)$, (b) *există* $U \in \mathcal{N}_Y^c$ *astfel încât* $(2U) \cap B = \emptyset$ *şi* $(y_0, 0) \notin \operatorname{qi} \mathcal{E}_U^B$, (c) $0 \in \operatorname{qi}(G(S) + K)$. *Atunci* (d) *există* $y^* \in C_B^\triangle$ *şi* $z^* \in K^+$ *astfel încât* $\langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle y_0, y^* \rangle$ *pentru orice* $(y, z) \in (F \times G)(S)$.

Invers, presupunem că (a) *şi* (d) *sunt verificate. Atunci au loc următoarele:* (b') *(adică condiţia* (b) *cu* qi *înlocuit prin* qri*),* (e) $z^*(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}$ *şi* (f) $y_0 \in \operatorname{HMin}(F(M), B)$.

Observaţia 12 Teorema 4.3 din [8] stabileşte că (a) $\wedge$ (f) $\wedge$ (b') $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\wedge$ (e) şi (a) $\wedge$ (d) $\wedge$ (e) $\Rightarrow$ (b') $\wedge$ (f) atunci când F este C-convexă, G este K-convexă şi B este o bază a lui C. Să observăm că (practic) singura diferenţă dintre [8, Th. 4.3] şi [5, Th. 3.1] este că condiţia (b') de mai sus este înlocuită printr-o altă condiţie (b) (mai complicată); de fapt, în ipoteza că condiţiile (a) şi (c) de mai sus sunt îndeplinite, condiţiile (b), (b') şi (b) din [5, Th. 3.1] sunt echivalente.

Se poate arăta că mai multe rezultate din [11] se pot obţine în condiţii mult mai slabe, dar nu mai dăm detalii aici.

Bibliografie

[1] M. Apetrii, M. Durea, R. Strugariu, *A new penalization tool in scalar and vector optimizations*, Nonlinear Analysis, 107 (2014), 22–33.

[2] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.

[3] M. Durea, R. Strugariu, *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, 60 (2011), 575–591.

[4] M. Durea, R. Strugariu, *Openness stability and implicit multifunction theorems: Applications to variational systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75 (2012), 1246–1259.

[5] X.H. Gong, *Optimality conditions for Henig and globally proper efficient solutions with ordering cone has empty interior*, J. Math. Anal. Appl., 307 (2005), 12–31.

[6] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 330 and 331, Berlin, 2006.

[7] N. M. Nam, C. Zălinescu, *Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems*, Set-Valued Var. Anal., 21 (2013), 405–430.

[8] T.N. Tasset, *Lagrange multipliers for set-valued functions when ordering cones have empty interior*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI (2010), thesis (Ph.D.)–University of Colorado at Boulder.

[9] J. J. Ye, *The exact penalty principle*, Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 75 (2012), 1642–1654.

[10] C. Zălinescu, *On the use of the quasi-relative interior in optimization*, 2014 (trimisă spre publicare).

[11] Z.A. Zhou, X.M. Yang, *Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior*, J. Optim. Theory Appl, 150 (2011), 327–340.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu