Raport de activitate ştiinţifică pentru grantul

Regularitate şi senzitivitate în optimizarea multicriterială

PN-II-ID-PCE-2011-3-0084, nr. 239/05.10.2011

ianuarie – decembrie 2015

În raport cu obiectivele propuse, în lucrarea [13] am studiat proprietăţile de subregularitate ale compunerii de multifuncţii, continuând studiul din lucrările [11], [12]. De asemenea, studiul nostru a luat în considerare dezvoltări recente din teoria regularităţii, unde interesul pentru caracterul său global a primit un imbold prin descoperirea unor conexiuni cu existenţa punctelor fixe pentru multifuncţii fîcută de Arutyunov în [2], [3], şi continuată de Dontchev şi Frankowska în [8], [9], şi de către Ioffe în [15], [16].

Principalul rezultat vizează proprietăţile de subregularitate ale compunerii între multifuncţiile $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$, ce acţionează între spaţii metrice.

Teorema 1 *Fie X, Y, Z, W spaţii metrice, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ şi $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii, iar $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in X \times Y \times Z \times W$. Fie $R : X \times Y \times Z \rightrightarrows W$ dată prin*

$$R(x,y,z) := \begin{cases} G(y,z), & \text{if } (y,z) \in (F_1,F_2)(x) \\ \emptyset, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Presupunem că există $\alpha \in (0, \infty]$ astfel încât următoarele ipoteze sunt satisfăcute:

(i) Două dintre multifuncţiile F_1, F_2, G au grafice complete, iar a treia are grafic închis;

(ii) F_1 este metric regulată pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{y}, \alpha)$ cu constanta $L > 0$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha)$ cu constanta $M > 0$;

(iv) G este metric regulată în raport cu y uniform în z pe $B(\overline{y}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha) \times B(\overline{w}, \alpha)$ pentru $\overline{w}$, cu constanta $C > 0$;

(v) G are proprietatea Aubin property în raport cu z uniform în y pe $B(\overline{y}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha) \times B(\overline{w}, \alpha)$ cu constanta $D > 0$;

(vi) $LCMD < 1$.

Atunci pentru orice $a, b, c, d > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} d < \alpha, \qquad & \frac{LC}{1 - LCMD} d + a < \alpha, \\ \frac{C}{1 - LCMD} d + b < \alpha, \qquad & \frac{LCM}{1 - LCMD} d + c < \alpha, \end{aligned} \tag{1}$$

multifuncţia R este metric subregulată pe $[B(\overline{x}, a) \times B(\overline{y}, b) \times B(\overline{z}, c)] \times B(\overline{w}, d)$ pentru $\overline{w}$ cu constanta $\dfrac{LC}{1 - LCMD}$, în raport cu metrica

$$d_0((x,y,z),(u,v,t)) = \max\{d(x,u), Ld(y,v), M^{-1}d(z,t)\}$$

pe $X \times Y \times Z$.

În plus, dacă $\alpha = \infty$, atunci a, b, c, d pot fi luate egale cu ∞.

Bazându-ne pe acest rezultat, putem deduce teoreme de punct fix, care extind un număr important de rezultate din literatură. Prima teoremă în acest sens este următoarea, care conţine estimări uniforme pentru distanţa la mulţimea punctelor de coincidenţă a două multifuncţii:

Teorema 2 *Fie X, Y spaţii metrice, iar $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii astfel încât graficul uneia este complet, iar al celeilalte este închis. Presupunem că există $\alpha > 0$ şi $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in F_1(\overline{x})$, $\overline{z} \in F_2(\overline{x})$ astfel încât următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(i) F_1 este metric regulată pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{y}, \alpha)$ cu constanta $L > 0$;

(ii) F_2 are proprietatea Aubin pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha)$ cu constanta $M > 0$;

(iii) $LM < 1$;

(iv) $d(\overline{y}, \overline{z}) \leq \dfrac{\beta}{2}$, unde

$$\beta := \frac{\alpha}{2 \max\left\{1, \frac{1}{1-LM}, \frac{L}{1-LM}\right\}}. \tag{2}$$

Atunci $\operatorname{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1) \neq \emptyset$. *În plus, există* $\theta > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x}, \theta)$, *şi orice* $y \in B(\overline{y}, \theta)$,

$$d(x, \operatorname{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1)) \leq \frac{L}{1 - LM} \left[d(y, F_1(x) \cap B(\overline{y}, \theta)) + d(y, F_2(x) \cap B(\overline{z}, \theta)) \right] \tag{3}$$

şi

$$d(y, \operatorname{Fix}(F_2 \circ F_1^{-1})) \leq \frac{1}{1 - LM} \left[LM d(y, F_1(x) \cap B(\overline{y}, \theta)) + d(y, F_2(x) \cap B(\overline{z}, \theta)) \right]. \tag{4}$$

În cazul $\alpha = \infty$, *constanta* θ *poate fi luată egală cu* ∞, *iar concluzia are loc pentru* $B(\overline{x}, \theta) = X$ *şi* $B(\overline{y}, \theta) = B(\overline{z}, \theta) = Y$.

În continuare, putem folosi Teorema 2 pentru a deduce estimări pentru excesul şi pentru distanţa Hausdorff între două mulţimi de puncte de coincidenţă, după cum se observă în următorul rezultat.

Teorema 3 *Fie* X, Y *spaţii metrice,* $F_1, \Phi_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2, \Phi_2 : X \rightrightarrows Y$ *multifuncţii cu domenii nevide, astfel încât în perechile* $(\operatorname{Gr} F_1, \operatorname{Gr} F_2)$ *şi* $(\operatorname{Gr} \Phi_1, \operatorname{Gr} \Phi_2)$, *unul dintre grafice este complet, iar altul este închis. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*
(i) F_1, Φ_1 *sunt metric regulate pe* $X \times Y$ *cu constanta* $L > 0$;
(ii) F_2, Φ_2 *au proprietatea Aubin pe* $X \times Y$ *cu constanta* $M > 0$;
(iii) $LM < 1$.
Atunci

$$h(\operatorname{Fix}(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1), \operatorname{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1)) \leq \frac{L}{1 - LM} \sup_{x \in X} \left[h(\Phi_1(x), F_1(x)) + h(\Phi_2(x), F_2(x)) \right] \tag{5}$$

şi

$$h(\operatorname{Fix}(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}), \operatorname{Fix}(F_2 \circ F_1^{-1})) \leq \frac{1}{1 - LM} \sup_{x \in X} \left[LM h(\Phi_1(x), F_1(x)) + h(\Phi_2(x), F_2(x)) \right]. \tag{6}$$

Dacă $X = Y$, luând în rezultatul anterior în locul lui F_1 şi Φ_1 aplicaţia identitate pe X, se poate deduce cu uşurinţă următoarea generalizare a Lemei lui Lim (vezi [18, Lemma 1], [1, Theorem 3]). Observăm că prima estimare pe care o obţinem (i.e., (7) mai jos) rezultă din [4, Corollary 4].

Corolarul 4 *Fie* X *un spaţiu metric complet,* $T_1, T_2 : X \rightrightarrows X$ *multifuncţii cu grafice închise şi domenii nevide, care au proprietatea Aubin pe* $X \times X$ *cu constanta* $M \in (0, 1)$. *Atunci*

$$e(\operatorname{Fix}(T_1), \operatorname{Fix}(T_2)) \leq \frac{1}{1 - M} \sup_{x \in X} e(T_1(x), T_2(x)). \tag{7}$$

În consecinţă,

$$h(\operatorname{Fix}(T_1), \operatorname{Fix}(T_2)) \leq \frac{1}{1 - M} \sup_{x \in X} h(T_1(x), T_2(x)). \tag{8}$$

Fie X, Y be spaţii liniare normate şi $C \subset Y$ un con convex propriu. C este normal dacă $[U_Y]_C$ este mărginit, unde U_Y este discul unitate din Y, şi $[A]_C := (A + C) \cap (A - C)$. Pentru $y, y' \in Y$ scriem $y \leq_C y'$ atunci când $y' - y \in C$. Lui Y îi adăugăm un element $\infty \notin Y$ obţinând astfel $Y^\bullet := Y \cup \{\infty\}$; considerăm că $y + \infty := \infty$, $\lambda \infty := \infty$ şi $y \leq_C \infty$ pentru $y \in Y$ şi $\lambda \in (0, \infty)$. Funcţia $f : X \to Y^\bullet$ este C-convexă dacă

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) x') \leq_C \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(x') \quad \forall x, x' \in X, \ \lambda \in (0, 1).$$

Domeniul lui f este mulţimea $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$. Spunem că funcţia $f : X \to Y^\bullet$ este C-mărginită superior pe mulţimea $A \subset X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $F(A) \subset r U_Y - C$; deci $A \subset \operatorname{dom} f$ dacă f este C-mărginită superior pe mulţimea $A \subset X$.

In [22] am obţinut the următorul rezultat.

Teorema 5 *Fie* X, Y *spaţii liniare normate,* $C \subset Y$ *un con convex propriu, şi* $f : X \to Y^\bullet$ *o funcţie* C*-convexă. Presupunem că* C *este con convex normal şi* f *este* C*-mărginită superior pe o vecinătate a lui* $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. *Atunci* f *este lipschitziană în jurul lui* x_0*; în plus,* f *este local lipschitziană pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

In cazul în care există $y_0 \in Y$ şi o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(U) \subset y_0 - C$, rezultatul anterior a fost obţinut de Borwein [5].

Inainte de a stabili versiunea multivocă a rezultatului precedent menţionăm că $F : X \rightrightarrows Y$ este C-mărginită inferior (resp. slab C-mărginită superior) pe mulţimea $A \subset X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $F(A) \subset rU_Y + C$ (resp. $F(x) \cap (rU_Y - C) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$).

Teorema 6 *Fie X, Y spaţii normate, C un con convex propriu, şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie C-convexă. Dacă F este C-mărginită inferior şi slab C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$, atunci F este C-lipschitziană în jurul lui x_0, adică există o vecinătate U a lui x_0 şi $l \in \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$F(x) \subset F(x') + l\,\|x - x'\|\,U_Y + C \quad \forall x, x' \in U;$$

în plus, F este local C-lipschitziană pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$*.*

Ipoteza teoremei precedente este mult mai slabă decât cea din [19, Th. 2.9] unde X este finit dimensional şi C^+ este finit generat şi punctat.

Am aplicat aceste rezultate unor problem de optimizare vectorială şi multivocă. Considerăm mai întâi următoarea problemă de optimizare vectorială:

$$\min \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in D, \tag{VP}$$

unde X, Y sunt spaţii Asplund, $f : X \to Y$ este o funcţie, $D \subset X$ şi C este un con convex, închis şi punctat din Y. Lui $f : X \to Y$ şi $F : X \rightrightarrows Y$ le asociem multifuncţiile $\mathcal{E}_f, \mathcal{E}_F : X \rightrightarrows Y$ cu $\operatorname{gph} \mathcal{E}_f := \operatorname{gph} f + \{0\} \times C$ şi $\operatorname{gph} \mathcal{E}_F := \operatorname{gph} F + \{0\} \times C$. Pentru o mulţime $\Omega \subset X$ şi $\overline{x} \in \Omega$ cu proprietatea că Ω este închisă în jurul lui $\overline{x}$, adică $\Omega \cap U$ este închisă pentru o vecinătate U a lui $\overline{x}$, notăm prin $N_L(\overline{x}, \Omega)$ conul normal în sensul lui Mordukhovich asociat lui Ω în $\overline{x}$. Pentru multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$ cu proprietatea că $\operatorname{gph} F$ este închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, $D^*F(\bar{x}, \bar{y})\colon Y^* \rightrightarrows X^*$ este coderivata în sensul lui Mordukhovich asociată lui F în $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$, şi este definită prin

$$D^*F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) := \big\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_L\big((\bar{x}, \bar{y}); \operatorname{gph} F\big)\big\}; \tag{9}$$

omitem $\bar{y} = f(\bar{x})$ în (9) atunci când $f\colon X \to Y$ şi $F(x) = \{f(x)\}$ pentru $x \in X$. Subdiferenţiala în sensul lui Mordukhovich a lui $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ în $\bar{x} \in X$ cu $|f(\bar{x})| < \infty$ este notată prin $\partial_L f(\bar{x})$ şi este definită prin

$$\partial_L f(\bar{x}) := \big\{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N_L\big((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f\big)\big\};$$

punem $\partial_L f(\bar{x}) := \emptyset$ dacă $|f(\bar{x})| = \infty$.

Teorema 7 *Fie C un con convex, închis şi normal din Y având interior nevid, $\emptyset \neq D \subset X$, şi $f : X \to Y$ o funcţie C-convexă. Fie $\bar{x} \in D$ o soluţie Pareto în sens slab pentru* (VP)*. Dacă f este C-mărginită superior pe o vecinătate U a lui $\bar{x}$, şi mulţimea D este închisă în jurul lui $\overline{x}$, atunci există $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$0 \in \partial(y^* \circ f)(\bar{x}) + N_L(\bar{x}; D).$$

In cazul în care C are interiorul vid avem rezultatul următor.

Teorema 8 *Fie C un con convex, închis şi normal din Y cu interiorul vid, $\emptyset \neq D \subset X$ şi $f : X \to Y$ o funcţie C-convexă. Fie $\bar{x} \in D$ soluţie Pareto a lui* (VP) *şi $\bar{y} = f(\bar{x})$. Presupunem că f este C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $\bar{x} \in D$, şi că mulţimea D este închisă în jurul lui $\overline{x}$. Mai presupunem că* $\operatorname{cone}(f(D) + C - \bar{y})$ *este închis; atunci pentru orice $e \in C \setminus \{0\}$, există $y^* \in C^+$ cu $y^*(e) = 1$ astfel încât*

$$0 \in \partial(y^* \circ f)(\bar{x}) + N_L(\bar{x}; D).$$

In rezultatul următor stabilim condiţii necesare pentru soluţiile următoarei probleme de minimizare multivocă:

$$\min \quad F(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in D, \tag{SP}$$

unde, ca mai sus, X, Y sunt spaţii Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie, C este un con convex, închis, propriu şi punctat din Y, iar $D \subset X$.

Teorema 9 *Fie X, Y spaţii Asplund, C un con convex, închis propriu şi punctat din Y, şi $\emptyset \neq D \subset X$. Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie C-convexă şi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ o soluţie în sens Pareto a problemei* (SP). *Presupunem că F este C-mărginită inferior şi slab C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $\bar{x}$,* epi F *este închisă în jurul lui $(\bar{x}, \bar{y})$, şi D este închisă în jurul lui $\bar{x}$. Mai presupunem că* $\operatorname{cone}\big(F(D) + C - \bar{y}\big)$ *este închis; atunci pentru orice $e \in C \setminus \{0\}$, există $y^* \in C^+$ cu $y^*(e) = 1$ astfel încât*

$$0 \in D^* \mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) + N_L(\bar{x}; D). \tag{10}$$

În lucrarea [10] studiem un nou tip de funcţie timp minimal. Funcţia timp minimal a fost studiată în mai multe lucrări, pornind de la ipoteze variate asupra spaţiului X şi a mulţimilor M şi Ω, în diferite scopuri. În abordarea noastră, M este o submulţime a sferei unitate a unui spaţiu Banach X, o situaţie mai potrivită scopului propus: explorarea unor proprietăţi direcţionale privind principalele obiecte ale analizei variaţionale: mulţimi, funcţii, multifuncţii, programare matematică scalară şi vectorială.

Această direcţie nu a fost incă abordată în literatură astfel încât lucrarea [10] este dedicată studiului proprietăţilor funcţiei timp minimal propusă, care sunt esenţiale pentru aplicaţii: inferioară semicontinuitate, convexitate, proprietatea Lipschitz, calcul subdiferenţial. La final am prezentat o aplicaţie pentru o problemă de locaţie.

Prezentăm, pe scurt, principalele rezultate.

Definiţie şi proprietăţi

Reamintim că dacă X este un spaţiu liniar normat real iar $u \in X \setminus \{0\}$ este un element şi $\emptyset \neq \Omega \subset X$ este o submulţime închisă, funcţia timp minimal este definită prin $T_u(\cdot, M) : X \to [0, \infty]$,

$$T_u(x, M) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tu \in M\},$$

cu convenţia $\inf \emptyset = +\infty$. În această formă, funcţia timp minimal a fost sistemtic analizată în [21].

În lucrarea noastră, [10], am considerat un spaţiu normat X, şi două submlţimi nevide $\Omega \subset X$, $M \subset S_X$ (sfera unitate a lui X). Atunci, funcţia timp minimal în raport cu direcţiile oferite de M este $T_M(\cdot, \Omega) : X \to [0, \infty]$ dată prin

$$T_M(x, \Omega) := \inf\left\{t \geq 0 \mid \exists u \in M : x + tu \in \Omega\right\}.$$

În majoritatea lucrărilor legate de funcţia timp minimal mulţimea M este considerată o vecinătate convexă, închisă, a originii iar acest fapt permite utilizarea funcţionalei Minkovski şi a multor instrumente din analiza convexă, dar se restrânge în acelaşi timp aplicabilitatea. În [10] am considerat M ca submulţime a sferei unitate, astfel încât M nu este întotdeauna convexă şi niciodată o vecinătate a originii crescând dificultatea studiului.

Desigur, $T_M(x, \Omega)$ corespunde cazului $T_u(x, \Omega)$ dacă $M := \{u\}$. Câteva proprietăţi de bază sunt prezentate în următoarea propoziţie. Ca de obicei, domeniul de definiţie al lui $T_M(\cdot, \Omega)$ este

$$\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) := \left\{x \in X \mid T_M(x, \Omega) < \infty\right\}.$$

Propoziţia 10 *(i) Domeniul funcţiei timp minimal în respect cu M este*

$$\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) = \Omega - \operatorname{cone} M.$$

(ii) Are loc relaţia

$$T_M(x, \Omega) = \inf_{u \in M} T_u(x, \Omega). \tag{11}$$

(iii) Penrtu orice $x \in X$ avem

$$d(x, \Omega) \leq T_M(x, \Omega). \tag{12}$$

Dacă $M = S_X$, atunci $\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) = X$ *şi*

$$T_M(x, \Omega) = d(x, \Omega), \quad \forall x \in X. \tag{13}$$

(iv) Dacă $\Omega, \Theta \subset X$, şi $M, L \subset S_X$, atunci

$$T_M(x, \Omega \cup \Theta) = \min\left\{T_M(x, \Omega), T_M(x, \Theta)\right\} \tag{14}$$

iar

$$T_{M \cup L}(x, \Omega) = \min\left\{T_M(x, \Omega), T_L(x, \Omega)\right\}.$$

(v) Dacă $\operatorname{cone} M$ *este convex, atunci pentru orice $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$, are loc relaţia:*

$$T_M(x_1 + x_2, \Omega_1 + \Omega_2) \leq T_M(x_1, \Omega_1) + T_M(x_2, \Omega_2), \quad \forall\ x_i \in \Omega_i - \operatorname{cone} M,\ i = 1, 2.$$

Propoziţia 11 *Presupunem că fie*

(i) una dintre mulţimile Ω şi M este compactăiar cealaltă închisă;

fie

(ii) X este reflexiv iar Ω şi M sunt slab închise.

Atunci infimumul din definiţia lui T_M este atins:

$$\forall x \in \Omega - \text{cone}M, \exists u \in M : x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega.$$

În mod evident, infimumul este atins în spaţii finit dimensionale ori de câte ori M şi Ω sunt închise. Propoziţia 11 acoperă Propoziţia 2.3 din [21].

În general, dacă renunţăm la condiţia de compacitate în Propoziţia 11 (i), infimumul este posibil să nu fie atins, în spaţii infinit dimensionale.

În rezultatul următor este evidenţiată structura mulţimilor de nivel ale funcţiei timp minimal.

Propoziţia 12 *Fie M şi Ω submulţimi arbitrare ale lui S_X şi, respectiv, X, şi fie $\lambda > 0$. Atunci*

(i) $[T_M(\cdot, \Omega) < \lambda] = \Omega - [0, \lambda) \cdot M$.

(ii) $\Omega - [0, \lambda] \cdot M \subset [T_M(\cdot, \Omega) \leq \lambda] \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} (\Omega - [0, \lambda + \varepsilon) \cdot M)$.

(iii) Dacă una dintre mulţimile Ω şi M este compactă iar cealaltă închisă atunci

$$[T_M(\cdot, \Omega) \leq \lambda] = \Omega - [0, \lambda] \cdot M,$$

şi, în particular, T_M este inferior semicontinuă.

Propoziţia anterioară generalizează Propoziţia 2.4 din [21].

Propoziţia 13 *Fie $x \in \operatorname{dom} T_M \setminus \Omega$ aşa încât există $u \in M$, $x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega$. Atunci $x + T_M(x, \Omega)u \in \operatorname{bd} \Omega$.*

Convexitate

Prezentăm n continuare câteva proprietăţi ale funcţiei timp minimal $T_M(\cdot, \Omega)$ legate de convexitate.

Propoziţia 14 *Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Dacă Ω şi $\operatorname{cone} M$ sunt mulţimi convexe atunci $T_M(\cdot, \Omega)$ este o funcţie convexă.

(ii) Dacă Ω este mulţime închisă iar $T_M(\cdot, \Omega)$ este o funcţie convexă atunci Ω este mulţime convexă. Dacă, în plus, Ω este mărginită iar M este închisă, atunci $\operatorname{cone} M$ este convex.

Cazul în care M este un singleton este mult mai simplu şi este tratat în Proposition 2.6 din [21].

Observaţia 15 *Folosind Propoziţa 13, se poate observa că pentru orice $x \in \operatorname{dom} T_M \setminus \Omega$, proiecţia lui x pe Ω,*

$$\Pi_M(x, \Omega) := \{\omega \in \Omega \mid \exists u \in M : x + T_M(x, \Omega)u = \omega\}$$

este conţinută în $\operatorname{bd} \Omega$.

Pe spaţii Hilbert, în ipoteze de convexitate obţinem faptul că $\Pi_M(x, \Omega)$ este o mulţime nevidă.

Propoziţia 16 *Presupunem că X este un spaţiu Hilbert, Ω şi M sunt închise şi Ω şi $\operatorname{cone} M$ sunt convexe. Atunci pentru orice $x \in \Omega - \operatorname{cone} M$, $T_M(x, \Omega)$ este atins.*

Considerăm acum proiecţia pe M a unui element $x \in \Omega - \operatorname{cone} M$:

$$S_M(x, \Omega) := \{u \in M \mid x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega\} \subset M.$$

În condiţii de strictă convexitate am evidenţiat unele legături între $\Pi_M(x, \Omega)$ şi $S_M(x, \Omega)$.

Propoziţia 17 *Presupunem că X este un spaţiu normat strict convex, şi $M \subset S_X$ astfel încât $\operatorname{cone} M$ este convex. Dacă există $x \in \operatorname{dom} T_M \setminus \operatorname{cl} \Omega$ astfel încât mulţimea $S_M(x, \Omega)$ are cel puţin două elemnte diferite atunci Ω nu este convexă.*

Observaţia 18 *Dacă* cone M *nu este convex, atunci mulţimea* $S_M(x,\Omega)$ *poate avea mai mult de un element chiar şi în spaţii strict convexe, cu* Ω *mulţime convexă.*

Propoziţia 19 *Dacă* Ω *este strict convexă iar* $M \subset S_X$ *este astfel încât* cone M *este convex, atunci* $S_M(x,\Omega)$ *este cel mult un singleton, pentru orice* $x \in \operatorname{dom} T_M \setminus \operatorname{cl}\Omega$.

În situaţiile descrise în Propoziţiile 17 şi 19 obţinem drept consecinţă imediată că proiecţia pe Ω, $\Pi_M(x,\Omega)$ are cel mult un element. Mai mult, dacă X este un spaţiu Hilbert, Ω şi M sunt închise şi Ω este strict convexă iar cone M este convex, în virtutea Propoziţiilor 19 şi 16, obţinem că $\Pi_M(x,\Omega)$ este un singleton. În literatură sunt câteva lucrări care se ocupă de acest aspect (i.e., mulţimea $\Pi_M(x,\Omega)$ este un singleton), în cazul în care M este o vecinătate convexă şi închisă a originii ([7], [20], [6], [14]). În cazul nostru M nu este nici convexă nici o vecinătate a originii.

Proprietatea Lipschitz

Prezentăm în continuare aspecte legate de proprietatea Lipschitz a funcţiei timp minial direcţional, T_M.

Propoziţia 20 *Dacă* cone M *este convex şi ori* cone $M \cap \operatorname{int}\Omega_\infty \neq \emptyset$, *ori* $\operatorname{int}(\operatorname{cone} M) \cap \Omega_\infty \neq \emptyset$ *atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este global Lipschitz.*

Există situaţii când funcţia $T_M(\cdot,\Omega)$ este global Lipschitz dar cone M nu este convex. Continuăm cu cazul local.

Propoziţia 21 *Dacă multifuncţia proiecţie*

$$\Pi_M(\cdot,\Omega) : \operatorname{dom} T_M \rightrightarrows \Omega, \quad \Pi_M(x,\Omega) = \{\tilde{x} \in \Omega \mid \exists u \in M : x + T_M(x,\Omega)u = \tilde{x}\}$$

este Lipschitz în jurul punctului $\overline{x} \in \operatorname{dom} T_M$ *(ca multifuncţie), atunci*T_M *este de asemenea Lipschitz în jurul acestui punct (ca funcţie).*

Propoziţia 22 *Presupunem că avem* cone M *convex şi că există* $\overline{x} \in \Omega$ *astfel încât* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este atins în orice punct din* $B(\overline{x},\eta)$, $\eta > 0$. *Atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este Lipschitz în jurul lui* $\overline{x}$ *dacă şi numai dacă există* $\ell \geq 0$ *şi* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$T_M(x+u,\Omega) \leq \ell\|u\|, \quad \forall u \in D(0,\delta),\ \forall x \in \Omega \cap B(\overline{x},\delta).$$

Analizăm în continuare situaţia în care punctul de referinţă nu aparţine lui Ω.

Propoziţia 23 *Fie* $\overline{x} \in X$ *astel încât* $T_M(\overline{x},\Omega)$ *este atins, adicăexistă* $\overline{v} \in M$ *astfel încât* $\widetilde{x} := \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)\overline{v} \in \Omega$, *şi presupunem că* Ω *este mulţime închisă iar* cone M *este convex. Dacă* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este local Lipschitz în jurul lui* $\widetilde{x}$ *de constantă Lipschitz* $\ell \geq 0$, *atunci pentru orice* x *într-o vecinătate a lui* $\overline{x}$, *are loc relaţia*

$$T_M(x,\Omega) \leq T_M(\overline{x},\Omega) + \ell\,\|x - \overline{x}\|\,. \tag{15}$$

Lema 24 *Presupunem că* Ω *este mulţime închisă,* cone M *este convex, şi* $\overline{x} \in X\backslash\Omega$ *are proprietatea că există* $\overline{v} \in \operatorname{int}\operatorname{cone} M$ *astfel încât* $\widetilde{x} := \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)\overline{v} \in \Omega$. *Atunci pentru orice* x *într-o vecinătate a lui* $\overline{x}$, *(15) are loc cu* $\ell := 1$.

Propoziţia 25 *Presupunem că una din mulţimile* M *şi* Ω *este compactă iar cealaltă închisă,* cone M *este convex şi* $\overline{x} \in X\backslash\Omega$ *are proprietatea că există* $\delta,\gamma > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x},\gamma)$, $T_M(x,\Omega)$ *este atins pe o direcţie* $v_x \in M$ *astfel încât* $B(v_x,\delta) \subset \operatorname{cone} M$. *Atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este local Lipschitz în jurul lui* $\overline{x}$ *cu modulul Lipschitz egal cu* 1.

Cazul $M := \{u\}$, a fost analizat în Propoziţia 4.1, Lemma 4.3 şi Corollary 4.6 din [21]. În cazul abordat de noi apar o serie de noi dificultăţi, după cum se poate uşor observa comparând rezultatele.

Calcul subdiferenţial şi aplicaţii

Dăm în continuare formule pentru subdiferenţiala Fréchet a lui $T_M(\cdot,\Omega)$.

Propoziţia 26 *Fie X un spaţiu liniar normat, $M \subset S_X$ şi $\Omega \subset X$.*

(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, atunci

$$\widehat{\partial} T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, -u\rangle \leq 1, \ \forall u \in M\} \cap \widehat{N}(\Omega, \overline{x}).$$

(ii) Presupunem că ne aflăm într-una din situaţiile descrise în Propoziţiile 11 şi 16 (i.e., $\Pi_M(x, \Omega) \neq \emptyset$, $\forall x \in \operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega)$). Fie $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$. Atunci pentru orice $u \in M$ şi $\omega \in \Omega$ cu $\overline{x} + T_M(\overline{x}, \Omega)u = \omega$, are loc relaţia

$$\widehat{\partial} T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, u\rangle = -1\} \cap \widehat{N}(\Omega, \omega).$$

De remarcat că rezultatul anterior nu este acoperit de cele deja existente pe această temă. De exemplu, în [17, Theorems 4.1, 4.2], mulţimea direcţiilor, M, este convexă, iar în cazul nostru acest lucru nu se cere. De asemenea, formula subdiferenţialei Fréchet pentru punctele dinafara lui Ω este diferită faţă de [17, Theorem 4.2], în sensul că noi folosim conul normal la Ω în punctele de proiecţie în loc de conul normal la mulţimile de nivel ale funcţiei timp minimal direcţional T_M.

Propoziţia 27 *Fie X un spaţiu Asplund, $M \subset S_X$ şi $\Omega \subset X$. Presupuenem că M este compactă iar Ω închisă.*

(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, atunci

$$\partial T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \exists u \in M : \langle x^*, -u\rangle \leq 1\} \cap N(\Omega, \overline{x}).$$

(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$, atunci pentru orice $x^* \in \partial T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x})$, există $u \in S_M(x, \Omega)$ astfel încât

$$\langle x^*, u\rangle = -1$$

şi

$$x^* \in N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x}, \Omega)u).$$

(iii) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, atunci

$$\partial^\infty T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \exists u \in M : \langle x^*, u\rangle \geq 0\} \cap N(\Omega, \overline{x}).$$

(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$, atunci pentru orice $x^* \in \partial^\infty T_M(\cdot, \Omega)(\overline{x})$, există $u \in S_M(x, \Omega)$ astfel încât

$$\langle x^*, u\rangle = 0$$

şi

$$x^* \in N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x}, \Omega)u).$$

Menţionăm din nou că situaţia în care M este singleton a fost analizată în [21, Proposition 3.15, Theorems 3.16, 3.18, 3.19]. Rezultatul obţinut de noi îl acoperă, parţial.

Corolarul 28 *Fie X un spaţiu normat finit dimensional, $M \subset S_X$ şi $\Omega \subset X$. Presupunem că M şi Ω sunt mulţimi închise.*

(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$ şi entru orice $u \in M$, $\{u\}^+ \cap N(\Omega, \overline{x}) = \{0\}$, atunci $T_M(\cdot, \Omega)$ este Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$.

(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$ şi pentru orice $u \in S_M(x, \Omega)$, $\{u\}^\perp \cap N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x}, \Omega)u) = \{0\}$, atunci $T_M(\cdot, \Omega)$ este Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$.

În final, lucrarea conţine o aplicaţie a funcţiei timp minimal direcţional la o problemă Fermat-Torricelli generalizată.

References

[1] S. Adly, A.L. Dontchev, M. Théra, *On one-sided Lipschitz stability of set-valued contractions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 35 (2014), 837–850.

[2] A.V. Arutyunov, *Covering mapping in metric spaces, and fixed points*, Doklady Mathematics, 76 (2007), 665–668.

[3] A.V. Arutyunov, *Stability of coincidence points and properties of covering mappings,* Mathematical Notes, 86 (2009), 153–158.

[4] A.V. Arutyunov, S.E. Zhukovskiy, *Perturbation of solutions of the coincidence point problem for two mappings*, Doklady Mathematics, 89 (2014), 346–348.

[5] J.M. Borwein, *Continuity and differentiability properties of convex operators*, Proc Lond Math Soc, 44(3) (1982), 420–444.

[6] G. Colombo, V. Goncharov, B. Mordukhovich, *Well-posedness of minimal time problems with constant dynamics in Banach spaces*, Set-Valued and Variational Analysis, 18 (2010), 349–372.

[7] G. Colombo, P.R. Wolenski, *Variational analysis for a class of minimal time functions in Hilbert spaces*, Journal of Convex Analysis, 11 (2004), 335–361.

[8] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (2011), 521–534.

[9] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points II*, Journal of Convex Analysis, 19 (2012), 955–973.

[10] M. Durea, M. Panţiruc, R. Strugariu, *Minimal time function with respect to a set of directions. Basic properties and applications*, Optimization Methods and Software, DOI: 10.1080/10556788.2015.1121488.

[11] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in general Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), 899–913.

[12] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in metric spaces and applications*, Mathematical Programming, Serie A, 143 (2014), 147–176.

[13] M. Durea, R. Strugariu, *Metric subregularity of composition set-valued mappings with applications to fixed point theory*, Set-Valued and Variational Analysis, online first, DOI: 10.1007/s11228-015-0327-6.

[14] V. Goncharov, F. Pereira, *Neighbourhood retractions of nonconvex sets in a Hilbert space via sublinear functionals*, Journal of Convex Analysis, 18 (2011), 1–36.

[15] A.D. Ioffe, *Towards variational analysis in metric spaces: metric regularity and fixed points*, Mathematical Programming, Serie B, 123 (2010), 241–252.

[16] A.D. Ioffe, *Regularity on a fixed set*, SIAM Journal on Optimization, 21 (2011), 1345–1370.

[17] Y. Jiang, Y. He, *Subdifferentials of a minimal time function in normed spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 358 (2009), 410–418.

[18] T.-C. Lim, *On fixed-point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 110 (1985), 436–441.

[19] N.B. Minh, N.X. Tan, *On the C-approximations of multivalued mappings,* Vietnam J Math, 30(4) (2002), 343–363.

[20] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, *Limiting subgradients of minimal time functions in Banach spaces*, Journal of Global Optimization, 46 (2010), 615–633.

[21] N.M. Nam, C. Zălinescu, *Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems*, Set-Valued and Variational Analysis, 21 (2013), 405–430.

[22] Vu Anh Tuan, Chr. Tammer, C. Zălinescu, *The Lipschitzianity of convex vector and set-valued functions*, TOP, online first, DOI: 10.1007/s11750-015-0401-0.

Project leader,
prof. dr. Constantin Zălinescu