Raport ştiinţific
privind implementarea proiectului în perioada octombrie 2011 – octombrie 2016
a contractului de cercetare

Regularitate şi senzitivitate în optimizarea multicriterială

PN-II-ID-PCE-2011-3-0084, nr. 239/05.10.2011

Obiectivele propuse pentru perioada octombrie 2011 - octombrie 2016 au fost studiul şi obţinerea rezultatelor corespunzătoare următoarelor două tematici asumate prin propunerea de proiect:

1. Mărginirea erorii pentru probleme de optimizare vectorială liniară
2. Regularitate metrică şi condiţii de calificare
3. Extensii ale Principilui Variational Ekeland pentru multifuncţii
4. Condiţii de existenţă şi optimalitate pentru puncte de minim în optimizarea multicriterială

În prezentul raport prezentăm principalele rezultate obţinute pe parcursul acestui grant (octombrie 2011 – octombrie 2016). Rezultatele pe care le prezentăm sunt conţinute în următoarele 20 de articole publicate/acceptate spre publicare/trimise spre publicare: [2], [3], [17], [18], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [29], [50], [57], [59], [62], [63], [64], [65], [66], [67], precum şi în capitolul 10 al cărţii [38].

Referitor la primul obiectiv, *Mărginirea erorii pentru probleme de optimizare vectorială liniară*, am abordat problema mărginirii erorii în cadrul general al problemelor de optimizare cu mulţimi, urmând să revenim asupra problemelor de optimizare vectorială liniară. Rezultatele următoare sunt conţinute în secţiunea 10.7 a cărţii [38].

Teeorema 1 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet, Y un spaţiu liniar topologic, $K \subset Y$ un con convex închis propriu, $H \subset K$ o mulţime convexă cu $0 \notin \mathrm{cl}(H + K)$, şi $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ a multifuncţie cu $\mathrm{dom}\,\Gamma \neq \emptyset$. Presupunem că $\{x \in X \mid \Gamma(u) \subset \Gamma(x) + d(x, u)H + K\}$ este închisă pentru orice $u \in X$, şi că $\Gamma(X)$ este quasi mărginită, adică există o mulţime $B \subset Y$ astfel încât $\Gamma(X) \subset B + K$. Dacă $S \subset X$ este astfel încât*

$$\forall x \in \mathrm{dom}\,\Gamma \setminus S,\ \exists u \in X \setminus \{x\} : \Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x, u)H + K, \tag{1}$$

atunci $S \cap \mathrm{dom}\,\Gamma \neq \emptyset$ şi

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + d(x, S \cap \mathrm{dom}\,\Gamma)H + K \quad \forall x \in X. \tag{2}$$

Demonstraţia acestui rezultat se bazează pe o variantă ceva mai generală a Teoremei 4.2 din [55]. Un rezultat mai general este următorul:

Teeorema 2 *Fie X, Y, K, H, Γ ca în teorema precedentă. Dacă $S, W \subset \mathrm{dom}\,\Gamma$ cu $S \neq \emptyset$ sunt astfel încât pentru orice $x \in \mathrm{dom}\,\Gamma \setminus (S \cup W)$ există $u \in X \setminus \{x\}$ cu $\Gamma(x) \subset \Gamma(u) + d(x, u)H + K$, şi*

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \eta d(x, S)H + K \quad \forall x \in W \tag{3}$$

pentru un $\eta > 0$, atunci, pentru $\mu := \min(\eta, 1)$,

$$\Gamma(x) \subset \Gamma(S) + \mu d(x, S)H + K \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

Un candidat natural pentru S in Teoremele 1, 2 este mulţimea soluţiilor problemei

$$(P) \qquad \min\nolimits_K \Gamma(x), \quad x \in X$$

în sensul lui Kuroiwa: $\overline{x}$ este soluţie a problemei (P) dacă $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + K \Rightarrow \Gamma(x) \subset \Gamma(\overline{x}) + K$; această alegere a noţiunii de soluţie pentru (P) este naturală în cazul Teoremei 1 deoarece concluzia [55, Th. 4.2] afirmă că $\overline{x}$ este o soluţie strictă a problemei (P) (în sensul lui Kuroiwa) pentru Γ înlocuit prin Γ', unde $\Gamma'(x) := \Gamma(x) + d(x, \overline{x})H$.

Un caz particular al Teoremei 1 este următorul corolar care însumează rezultate ale lui Takahashi [54] şi Hamel [32].

Corolarul 3 *Fie* (X,d) *spaţiu metric complet şi* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Dacă pentru* $\gamma \in (0,\infty)$ *fixat şi pentru orice* $x \in X$ *cu* $f(x) > \inf f$ *există* $u \in X \setminus \{x\}$ *astfel încât* $f(u) + \gamma d(x,u) \leq f(x)$, *atunci* $S := \arg\min f$ *este nevidă şi*

$$\gamma d(x,S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

Corespunzător Teoremei 2 avem rezultatul următor:

Corolarul 4 *Fie* (X,d) *spaţiu metric complet şi* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *o funcţie isc, proprie, mărginită inferior. Presupunem că* $S := \arg\min f \neq \emptyset$, $W \subset \operatorname{dom} f$, *şi* $\gamma, \eta \in (0,\infty)$ *sunt astfel încât pentru orice* $x \in \operatorname{dom} f \setminus (S \cup W)$ *există* $u \in X \setminus \{x\}$ *astfel încât* $f(u) + \gamma d(x,u) \leq f(x)$, *şi* $\eta d(x,S) \leq f(x) - \inf f$ *pentru orice* $x \in W$. *Atunci, pentru* $\mu := \min(\gamma,\eta)$,

$$\mu d(x,S) \leq f(x) - \inf f \quad \forall x \in X.$$

Utilizând corolarul precedent obţinem rezultatul următor.

Corolarul 5 *Fie* (X,d) *spaţiu metric complet şi* $f_i : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(i \in \overline{1,n})$ *funcţii proprii şi isc cu* $S := \cap_{i=1}^n [f_i \leq 0] \neq \emptyset$. *Presupunem că există* $W \subset D := \cap_{i=1}^n \operatorname{dom} f_i$ *şi* $\gamma, \eta \in (0,\infty)$ *satisfăcând condiţiile:*

(i) *pentru orice* $x \in D \backslash (S \cup W)$ *există* $\widehat{x} \in X \backslash \{x\}$ *a.î.* $I_>(\widehat{x}) \subset I_>(x)$ *şi* $\gamma d(x,\widehat{x}) \leq \sum_{i \in I_>(x)} [(f_i)_+(x) - (f_i)_+(\widehat{x})]$, *unde* $I_>(x) := \{i \in \overline{1,n} \mid f_i(x) > 0\}$, *şi*

(ii) $\eta d(x,S) \leq \sum_{i \in I_>(x)} (f_i)_+(x)$ *pentru orice* $x \in W$.

Atunci, $\mu d(x,S) \leq \sum_{i=1}^n (f_i)_+(x)$ *pentru orice* $x \in X$, *unde* $\mu := \min(\gamma,\eta)$.

Corolarul 5 furnizează condiţii suficiente pentru mărginirea erorii pentru sistemul $f_i(x) \leq 0,\ i \in \overline{1,n}$. Acest rezultat este practic [45, Teorema 4.1]; acolo X este un Banach şi în loc de (i) se cere ca orice $x \in X \setminus (S \cup W)$ să aibă proprietatea de γ-descreştere.

Corespunzător obiectivului *3. Extensii ale Principiului Variational Ekeland pentru multifuncţii,* ne-am propus sa extindem rezultatele publicate în [55] referitoare la Principiului Variational Ekeland pentru multifuncţii în aşa fel încât să cuprindă rezultate recente de tip EVP stabilite în [51] pentru funcţii, precum şi rezultate din [45].

Considerăm (X,d) un spaţiu metric, Y un spaţiu liniar topologic, $K \subset Y$ un con convex propriu şi $F : X \times X \rightrightarrows K$ satisfăcând condiţiile

(F1) $\quad 0 \in F(x,x)$ pentru orice $x \in X$,

(F2) $\quad F(x_1,x_2) + F(x_2,x_3) \subset F(x_1,x_3) + K$ pentru orice $x_1,x_2,x_3 \in X$.

Observăm că relaţia $\preceq_F$ definită prin

$$(x_1,y_1) \preceq_F (x_2,y_2) \iff y_2 \in y_1 + F(x_1,x_2) + K$$

este o relaţie de preordine (adică este reflexivă şi tranzitivă). De asemenea, pentru $z^* \in K^+$, considerăm şi relaţia de ordine parţială $\preceq_{F,z^*}$ definită prin

$$(x_1,y_1) \preceq_{F,z^*} (x_2,y_2) \iff \begin{cases} (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \text{ sau} \\ (x_1,y_1) \preceq_F (x_2,y_2) \text{ şi } z^*(y_1) < z^*(y_2). \end{cases}$$

De asemenea considerăm şi condiţia

$$\forall \delta > 0,\ \forall (z_n) \subset F_\delta,\ \exists z^* \in K^+ \ :\ \limsup z^*(z_n) > 0, \tag{6}$$

unde, pentru $\delta \geq 0$,

$$F_\delta := \cup_{d(x,x') \geq \delta} F(x,x').$$

Teoerema 6 *Fie* (X,d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex propriu. Presupunem că*

(i) $F : X \times X \rightrightarrows Y$ *satisface condiţiile (F1), (F2) şi (6), iar*

(ii) $A \subset X \times Y$ *verifică condiţia*

(H1) *pentru orice şir* $\preceq_F$*–descrescător* $((x_n, y_n)) \subset A$ *cu* $x_n \to x \in X$ *există* $y \in Y$ *astfel încât* $(x, y) \in A$ *şi* $(x, y) \preceq_F (x_n, y_n)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci pentru orice $(x_0, y_0) \in A$ *şi orice* $z^* \in K^+$ *astfel încât* $z^*(\mathrm{Pr}_Y(A))$ *este mărginită inferior, există un element minimal* $(\bar{x}, \bar{y})$ *a lui* A *relativ la* $\preceq_{F,z^*}$ *astfel încât* $(\bar{x}, \bar{y}) \preceq_{F,z^*} (x_0, y_0)$. *In plus, dacă* $z^*(z) > 0$ *pentru orice* $z \in \cup_{\delta>0} F_\delta$, *atunci* $A \ni (x, y) \preceq_F (\bar{x}, \bar{y})$ *implică* $x = \overline{x}$.

Pentru a aplica rezultatul precedent la cazul funcţiilor definite pe submulţimi ale lui X, adăugăm la Y două elemente distincte $-\infty$ şi $+\infty$ care nu se găsesc în Y, obţinând astfel spaţiul $Y^\bullet := Y \cup \{-\infty, \infty\}$. Considerăm că $-\infty \leq_K y \leq_K \infty$ pentru orice $y \in Y$. Fie funcţia $f : X \to Y^\bullet$. Ca de obicei, $\mathrm{dom}\, f = \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$, $\mathrm{epi}\, f = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \leq_K y\}$; f este proprie dacă $\mathrm{dom}\, f \neq \emptyset$ şi $f(x) \neq -\infty$ pentru orice $x \in X$; graficul funcţiei proprii f este $\mathrm{graph}\, f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{dom}\, f\}$. Pentru $y^* \in K^+$ punem $(y^* \circ f)(x) := +\infty$ pentru $x \in X \setminus \mathrm{dom}\, f$.

Utilizând teorema precedentă obţinem următorul rezultat; acesta este practic echivalent cu [51, Th. 3.6].

Teoerema 7 *Fie* X, Y, K *precum în teorema precedentă. Presupunem că* $F : X \times X \rightrightarrows K$, *iar* $f : X \to Y^\bullet$ *este o funcţie proprie satisfăcând condiţia:*

(H3) *pentru orice şir* $(x_n) \subset \mathrm{dom}\, f$ *cu* $x_n \to x \in X$ *şi* $f(x_n) \in f(x_{n+1}) + F(x_{n+1}, x_n) + K$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *avem că* $f(x_n) \in f(x) + F(x, x_n) + K$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$.

Atunci pentru orice $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ *şi orice* $z^* \in K^+$ *cu* $z^* \circ f$ *mărginită inferior pe mulţimea* $\{x \in \mathrm{dom}\, f \mid f(x_0) \in f(x) + F(x, x_0) + K\}$, *există* $\overline{x} \in \mathrm{dom}\, f$ *astfel încât*

$$f(x_0) \in f(\overline{x}) + F(\overline{x}, x_0) + K$$

şi

$$\forall x \in \mathrm{dom}\, f \ : \ f(\overline{x}) \in f(x) + F(\overline{x}, x) + K \Rightarrow x = \overline{x}.$$

Are loc şi următorul rezultat.

Teoerema 8 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex propriu. Presupunem că* $F : X \times X \rightrightarrows K$ *satisface condiţiile (F1), (F2) şi*

(F3) *există* $z^* \in K^+$ *astfel încât*

$$\eta(\delta) := \inf \left\{ z^*(v) \mid v \in \cup_{d(x,x')\geq\delta} F(x, x') \right\} > 0 \quad \forall \delta > 0, \tag{7}$$

iar $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *este astfel încât* z^* *(din (F3)) este mărginită inferior pe* $\Gamma(X)$. *Presupunem de asemenea că* (a) $\{x \in X \mid \Gamma(u) \subset \Gamma(x) + F(x, u)\}$ *este închisă pentru orice* $u \in X$, *şi* (b) $\Gamma(y) \subset \Gamma(x) + F(x, y)$, $\Gamma(z) \subset \Gamma(y) + F(y, z)$ *implică* $\Gamma(z) \subset \Gamma(x) + F(x, z)$ *pentru orice* $x, y, z \in X$. *Atunci pentru orice* $x_0 \in \mathrm{dom}\, \Gamma$ *există* $\overline{x} \in X$ *astfel încât* $\Gamma(x_0) \subset \Gamma(\overline{x}) + F(\overline{x}, x_0)$, *şi* $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + F(x, \overline{x}) + K$ *implică* $x = \overline{x}$.

Pentru Y spaţiu local convex separat Hausdorff, $K \subset Y$ con convex şi închis, $k^0 \in K \setminus \{0\}$, $F(x, x') := d(x, x')k^0$ pentru $x, x' \in X$, iar $\Gamma(X)$ quasi-mărginită, din rezultatul precedent se obţine [44, Cor. 3.1].

Teoerema 9 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* Y *un spaţiu liniar topologic,* $K \subset Y$ *un con convex, propriu şi închis. Presupunem că* $\emptyset \neq H \subset K$ *este convexă. Fie* $\Gamma : X \rightrightarrows Y$ *astfel încât* $\mathrm{epi}\, \Gamma := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in \Gamma(x) + K\}$ *este închisă şi* $\Gamma(X)$ *este quasi-mărginită. Presupunem că una dintre următoarele condiţii este îndeplinită:*

(i) H *este mărginită, cs-completă, şi* $0 \notin \mathrm{cl}(H + K)$;

(ii) Y *este un spaţiu normat, iar* H *este cs-completă cu* $0 \notin \mathrm{cl}\, H$ *şi satisfăcând condiţia*

$$\exists \overline{y}^* \in K^+ \setminus \{0\}, \ \forall h \in H : \langle h, \overline{y}^* \rangle \geq \|h\| \, ; \tag{8}$$

(iii) Y *este un spaţiu Banach reflexiv, iar* H *este închisă cu* $0 \notin H$ *şi satisfăcând condiţia*

$$\exists \gamma > 0, \ \forall h \in H, \ \forall k \in K : \|h + k\| \geq \gamma \|h\| \, . \tag{9}$$

Atunci pentru orice $x_0 \in \operatorname{dom}\Gamma$ există $\overline{x} \in X$ astfel încât $\Gamma(x_0) \subset \Gamma(\overline{x}) + d(\overline{x}, x_0)H + K$ şi $\Gamma(\overline{x}) \subset \Gamma(x) + d(x, \overline{x})H + K$ implică $x = \overline{x}$.

În teorema precedentă punctul (iii) este exact [45, Th. 3.5 (iii)], (ii) este puţin mai generală decât [45, Th. 3.5 (i)] (în care în plus Y este spaţiu Banach şi H este convexă şi închisă), iar (i) este mult mai general decât [45, Th. 3.5 (ii)] (în care în plus Y este spaţiu Banach şi H este convexă şi închisă, şi (9) are loc).

Rezultate conexe sunt conţinute în lucrările [62], [50] şi [59]. De exemplu, în [62] furnizăm contraexemple la rezultate referitoare la extinderea aplicaţiilor liniare dominate de multifuncţii convexe. Mai precis, aceste contraexemple se referă la Teoremele 2.2, 3.2 şi Corolarul 2.2 din [16], Teoremele 2.1, 3.1 din [39] şi Teorema 3.1 din [31]. In [50] se face un studiu destul de complet al funcţiei $T_v(\cdot;\Omega)$ definită prin

$$T_v(x;\Omega) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tv \in \Omega\}, \tag{10}$$

unde $\Omega \subset X$ este nevidă şi închisă, X fiind un spaţiu normat, iar $v \in X \setminus \{0\}$. Apoi proprietăţile găsite ale funcţiei $T_v(\cdot;\Omega)$ se utilizează pentru a studia un nou model pentru probleme de locaţie. In [59] se pun în evidenţă mai multe condiţii, necesare respectiv suficiente pentru ca înfăşurătoarea inferior semicontinuă a unei funcţii cu valori în $\overline{\mathbb{R}}$ definită pe un spaţiu Banach reflexiv să fie esenţial strict convexă. De asemenea se obţin noi rezultate referitoare la punctele cele mai apropiate (depărtate) dintr-o mulţime utilizând această abordare.

În cadrul obiectivelor *2. Regularitate metrică şi condiţii de calificare* şi *4. Condiţii de existenţă şi optimalitate pentru puncte de minim în optimizarea multicriterială,* am obţinut mai mai multe rezultate conţinute în lucrările [2], [3], [17], [18], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [57], [63].

Menţionăm pe scurt principalele motivaţii care au stat la baza acestor studii şi cele mai importante rezultate obţinute.

Lucrarea [22] este dedicată optimizării parametrice cu restricţii de tip echilibru, acest subiect fiind în ultimele decade la originea multor eforturi îndreptate în direcţia studiului sistemelor variaţionale. Cităm aici importantele lucrări ale lui Robinson [52], Dontchev şi Rockafellar [28], Mordukhovich [48] pentru o discuţie detaliată şi pentru un istoric al acestui subiect.

Motivaţia noastră este dată de unele probleme parametrice de optimizare (în notaţiile noastre mulţimea parametrilor este P şi este iniţial considerată ca spaţiu topologic). Fie X, Y spaţii Banach. În cazul cel mai simplu al unei funcţii obiectiv parametrice cu valori scalare $f : X \times P \to \mathbb{R}$, considerăm problema

$$(P_S): \quad \min f(x,p) \text{ cu } 0 \in H(x,p),$$

unde $H : X \times P \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie ce defineşte un sistem de constrângeri generalizat prin relaţia $0 \in H(x,p)$. Multifuncţia implicită $S : P \rightrightarrows X$ asociată lui H este

$$S(p) = \{x \in X \mid 0 \in H(x,p)\}.$$

Putem înţelege conceptul de soluţie pentru (P_S) în cel puţin două moduri diferite iar ideea de studiu al condiţiilor necesare de optimalitate este aceea de a transforma problema cu restricţii într-una fără restricţii de forma $f(x,p) + Ld(x, S(p))$ sau $f(x,p) + Ld((p,x), \operatorname{Gr} S)$. In ambele cazuri. este nevoie de proprietăţi de regularitate a sistemului de constrângeri de forma 1) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d(x, S(p)) \leq r d(0, H(x,p)) \tag{11}$$

are loc pentru orice $p \in M$ şi orice x într-o vecinătate a lui $\overline{x}$ sau 2) există $r > 0$ a.î. inegalitatea

$$d((p,x), \operatorname{Gr} S) \leq r d((x,p,0), \operatorname{Gr} H) \tag{12}$$

are loc pentru orice (x,p) într-o vecinătate a lui $(\overline{x}, \overline{p})$.

Astfel, în articolul menţionat, stabilim mai multe condiţii noi ce asigură inegalităţile (11) şi (12) cu un accent special pe cazul multifuncţiilor de tip epigraf ce sunt esenţiale în optimizare. Apoi, aplicăm aceste rezultate asupra unor probleme vectoriale specifice cu scopul de a obţine noi condiţii necesare de optimalitate.

Pentru mai multe detalii asupra tehnicilor folosite şi a rezultatelor obţinute, a se vedea lucrarea [22].

O altă lucrare este articolul [24], care conţine un studiu motivat de importanţa mulţimilor tangente şi a proprietăţilor lor de calcul în abordarea unor probleme matematice diverse: optimizare, viabilitate sau control optimal. Capitolul 4 din cuprinzătoarea monografie [8] pune în evidenţă cu claritate această idee care reprezintă substratul motivaţional al multor articole din literatură. Punctul de plecare al lucrării noastre este observaţia că mai multe lucrări recente din literatura ultimilor ani (a se vedea, de exemplu, [42], [40]) utilizează condiţii destul de tari asupra datelor iniţiale pentru a obţine reguli de calcul pentru tangenţa generalizată. Vorbim aici despre condiţii privitoare la mai multe tipuri de compactitate generalizată a graficelor unor multifuncţii ce intervin pe parcurs, iar astfel de condiţii sunt foarte puternice în cadrul spaţiilor normate infinit dimensionale. În ceea ce ne priveşte, pentru stabilirea unor reguli de calcul pentru mulţimi tangente, preferăm să urmăm un drum iniţiat în [8, Capitolul 4] care permite utilizarea ipotezelor de regularitate metrică ce sunt mai adecvate cadrului menţionat. Unul dintre rezultatele principale obţinute este următorul.

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie între spaţiile Banach X, Y şi $f : X \to X$ o funcţie. Notăm cu $F \circ f$ multifuncţia de la X la Y dată prin $(F \circ f)(x) = F(f(x))$ pentru orice $x \in X$. Prin $D_B F(\overline{x}, \overline{y})$ notăm derivata Bouligand a lui F în punctul $(\overline{x}, \overline{y})$ al graficului său.

Teoerema 10 *Fie $F_1, F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafic închis, $f : X \to X$ de clasă C^1 şi $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr}(F_2 \circ f)$. Presupunem că funcţia $g : (X \times Y)^2 \longrightarrow X$, $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = f(\alpha) - \gamma$ este metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1, f(\overline{x}), \overline{y}_2)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F_1 \times \operatorname{Gr} F_2$. Dacă F_1 este proto-diferenţiabilă în $\overline{x}$ relativ la $\overline{y}_1$ sau F_2 este proto-diferenţiabilă în $f(\overline{x})$ relativ la $\overline{y}_2$, atunci, pentru orice $u \in X$,*

$$D_B F_1(\overline{x}, \overline{y}_1)(u) + D_B F_2(f(\overline{x}), \overline{y}_2)(\nabla f(\overline{x})(u)) \subset D_B(F_1 + F_2 \circ f)(\overline{x}, \overline{y}_1 + \overline{y}_2)(u).$$

Reguli de calcul pentru coderivatele de ordinul al doilea sunt de asemenea obţinute şi apoi aplicăm aceste rezultate pentru a obţine condiţii de optimalitate pentru probleme vectoriale. Cazul multifuncţiilor parametrice este analizat separat şi, într-un caz particular, regăsim un rezultat al lui Rockafellar din lucrarea [53] (Teorema 5.4).

În lucrările [23] şi [25] am obţinut rezultate referitoare la deschiderea cu rată liniară a multifuncţiilor de tip compunere, mai întâi definite între spaţii Banach, iar mai apoi între spaţii metrice generale. Ca aplicaţii directe, se pot obţine teoreme de tip Lyusternik-Graves, atât în forma cunoscută în literatură, cât şi variante noi ale acesteia. De asemenea, se obţin ca aplicaţii teoreme de tip punct fix pentru multifuncţii, ce intră în relaţie cu rezultate foarte recente din lucrările [6], [35], [14], [15]. Regularitatea multifuncţiei soluţie asociată cu sisteme variaţionale parametrice a fost de asemenea investigată, oferindu-se condiţii suficiente care asigură proprietatea Aubin, respectiv regularitatea metrică a acesteia. Estimări precise ale modulelor de regularitate au fost precizate. Rezultatele noastre le acoperă şi le extind la cazul complet multivoc mai multe rezultate din litreratura recentă. Prezentăm pe scurt rezultatele principale.

Cel mai important rezultat, demonstrat în [23] în cadrul spaţiilor Banach (prin intermediul Principiului Variaţional Ekeland) şi extins mai apoi în [25] la spaţii metrice generale (cu o demonstraţie complet diferită, bazată pe o procedură iterativă de tip Lyusternik), este următorul.

Teoerema 11 *Fie X, Y, Z, W spaţii metrice, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ şi $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in X \times Y \times Z \times W$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1$, $(\overline{x}, \overline{z}) \in \operatorname{Gr} F_2$ şi $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w}) \in \operatorname{Gr} G$. Fie $H : X \rightrightarrows W$ definită prin*

$$H(x) := G(F_1(x), F_2(x)) \quad \forall x \in X.$$

Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:

(i) $\operatorname{Gr} F_1$, $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, $(\overline{x}, \overline{z})$, respectiv, iar $\operatorname{Gr} G$ este local închis în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$;

(ii) F_1 este deschisă cu rata liniară $L > 0$ în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{z})$ cu modulul $M > 0$;

(iv) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $C > 0$;

(v) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), \overline{w})$ cu modulul $D > 0$;

(vi) $LC - MD > 0$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\overline{w}, (LC - MD)\rho) \subset H(B(\overline{x}, \rho)).$$

Mai mult, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y', z', w') \in B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}, \varepsilon') \times B(\overline{z}, \varepsilon') \times B(\overline{w}, \varepsilon')$ astfel încât $(y', z') \in (F_1, F_2)(x')$ şi $w' \in G(y', z')$,

$$B(w', (LC - MD)\rho) \subset H(B(x', \rho)).$$

Drept aplicaţie a rezultatului principal, prezentat mai sus, obţinem următoarea variantă a Teoremei Lyusternik-Graves, necunoscută până acum.

Corolarul 12 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat şi $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii, $(\overline{x}, \overline{y}_1, \overline{y}_2) \in X \times Y \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}_1) \in \operatorname{Gr} F_1$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2) \in \operatorname{Gr} F_2$, cu $\overline{y}_1 \neq \overline{y}_2$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $\operatorname{Gr} F_1$ şi $\operatorname{Gr} F_2$ sunt local complete în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ şi $(\overline{x}, \overline{y}_2)$, respectiv;

(ii) F_1 e metric regulată în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_1)$ cu modulul $l > 0$;

(iii) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y}_2)$ cu modulul $m > 0$;

(iv) $lm < 1$.

Atunci există $\varepsilon > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon)$,

$$B(\|\overline{y}_1 - \overline{y}_2\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(\overline{x}, \rho)\}.$$

În plus, există $\varepsilon' > 0$ astfel încât, pentru orice $\rho \in (0, \varepsilon')$ şi orice $(x', y_1', y_2') \in \operatorname{Gr}(F_1, F_2) \cap [B(\overline{x}, \varepsilon') \times B(\overline{y}_1, \varepsilon') \times B(\overline{y}_2, \varepsilon')]$,

$$B(\|y_1' - y_2'\|, (l^{-1} - m)\rho) \subset \{\|y_1 - y_2\| \mid y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), x \in B(x', \rho)\}.$$

O altă aplicaţie o reprezintă următoarea teoremă de punct fix pentru multifuncţii.

Teoerema 13 *Fie X un spaţiu metric, Y un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F_1 \cap \operatorname{Gr} F_2$. Presupunem că (i)-(iv) din Corolarul 12 sunt satisfăcute.*

Atunci există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B(\overline{x}, \alpha)$, avem

$$d(x, \operatorname{Fix}(F_1^{-1} F_2)) \leq (l^{-1} - m)^{-1} d(F_1(x) \cap B(\overline{y}, \beta), F_2(x)), \tag{13}$$

unde

$$\operatorname{Fix}(F_1^{-1} F_2) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap F_2(x) \neq \emptyset\}.$$

Considerăm $H : X \times P \rightrightarrows W$, unde X, P sunt spaţii metrice, iar W este un spaţiu normat, dată prin $H(x, p) := G(F_1(x), F_2(x, p))$, unde $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$. Asociat acestei multifuncţii, considerăm sistemul parametric $0 \in G(F_1(x), F_2(x, p))$. Multifuncţia soluţie asociată acestui sistem este $S : P \rightrightarrows X$, dată prin $S(p) := \{x \in X \mid 0 \in H(x, p)\}$. In finalul lucrării [25] am obţinut două rezultate privind regularitatea aplicaţiei multivoce S. Pentru a putea deduce astfel de teoreme, am introdus şi investigat o nouă noţiune, numită locală stabilitate la compunere, ce are drept principală aplicaţie conservarea proprietăţii Aubin la operaţia de compunere a două multifuncţii. Exemplificăm mai jos această direcţie de lucru.

Teoerema 14 *Fie X, P, Y, Z spaţii metrice, W un spaţiu normat, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \times P \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{y}, \overline{z}) \in X \times P \times Y \times Z$ astfel încât $\overline{y} \in F_1(\overline{x})$, $\overline{z} \in F_2(\overline{x}, \overline{p})$ şi $0 \in G(\overline{y}, \overline{z})$. Presupunem că următoarele afirmaţii sunt satisfăcute:*

(i) $(F_1, F_2), G$ sunt local stabile la compunere în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), (\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(ii) $\operatorname{Gr} F_1$ este complet, $\operatorname{Gr}(F_2)_p$ este complet pentru orice p într-o vecinătate a lui $\overline{p}$ şi $\operatorname{Gr} G$ este închis;

(iii) F_1 e deschisă cu rată liniară în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$;

(iv) F_2 are proprietatea Aubin în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{z})$;

(v) G e deschisă cu rată liniară în raport cu y uniform în z în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vi) G are proprietatea Aubin în raport cu z uniform în y în jurul lui $((\overline{y}, \overline{z}), 0)$;

(vii) $\widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0) < \widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z})$.

Atunci S are proprietatea Aubin în jurul lui $(\overline{p}, \overline{x})$. În plus, are loc relaţia

$$\operatorname{lip} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq \frac{\widehat{\operatorname{lip}}_p F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}{\widehat{\operatorname{lop}}_y G((\overline{y}, \overline{z}), 0) \cdot \operatorname{lop} F_1(\overline{x}, \overline{z}) - \widehat{\operatorname{lip}}_x F_2((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) \cdot \widehat{\operatorname{lip}}_z G((\overline{y}, \overline{z}), 0)}.$$

Urmând studiul din [23] şi [25], în lucrarea [26] am studiat proprietăţile de subregularitate ale compunerii de multifuncţii. De asemenea, studiul nostru a luat în considerare dezvoltări recente din teoria regularităţii, unde interesul pentru caracterul său global a primit un imbold prin descoperirea unor conexiuni cu existenţa punctelor fixe pentru multifuncţii fĭcută de Arutyunov în [5], [6], şi continuată de Dontchev şi Frankowska în [14], [15], şi de către Ioffe în [35], [36].

Principalul rezultat vizează proprietăţile de subregularitate ale compunerii între multifuncţiile $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$, $G : Y \times Z \rightrightarrows W$, ce acţionează între spaţii metrice.

Teoerema 15 *Fie X, Y, Z, W spaţii metrice, $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Z$ şi $G : Y \times Z \rightrightarrows W$ multifuncţii, iar $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \overline{w}) \in X \times Y \times Z \times W$. Fie $R : X \times Y \times Z \rightrightarrows W$ dată prin*

$$R(x, y, z) := \begin{cases} G(y, z), & \textit{if } (y, z) \in (F_1, F_2)(x) \\ \emptyset, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Presupunem că există $\alpha \in (0, \infty]$ astfel încât următoarele ipoteze sunt satisfăcute:
(i) Două dintre multifuncţiile F_1, F_2, G au grafice complete, iar a treia are grafic închis;
(ii) F_1 este metric regulată pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{y}, \alpha)$ cu constanta $L > 0$;
(iii) F_2 are proprietatea Aubin pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha)$ cu constanta $M > 0$;
(iv) G este metric regulată în raport cu y uniform în z pe $B(\overline{y}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha) \times B(\overline{w}, \alpha)$ pentru $\overline{w}$, cu constanta $C > 0$;
(v) G are proprietatea Aubin property în raport cu z uniform în y pe $B(\overline{y}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha) \times B(\overline{w}, \alpha)$ cu constanta $D > 0$;
(vi) $LCMD < 1$.
Atunci pentru orice $a, b, c, d > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned} d < \alpha, \qquad & \frac{LC}{1 - LCMD} d + a < \alpha, \\ \frac{C}{1 - LCMD} d + b < \alpha, \qquad & \frac{LCM}{1 - LCMD} d + c < \alpha, \end{aligned} \tag{14}$$

multifuncţia R este metric subregulată pe $[B(\overline{x}, a) \times B(\overline{y}, b) \times B(\overline{z}, c)] \times B(\overline{w}, d)$ pentru $\overline{w}$ cu constanta $\dfrac{LC}{1 - LCMD}$, în raport cu metrica

$$d_0((x, y, z), (u, v, t)) = \max\{d(x, u), Ld(y, v), M^{-1} d(z, t)\}$$

pe $X \times Y \times Z$.
În plus, dacă $\alpha = \infty$, atunci a, b, c, d pot fi luate egale cu ∞.

Bazându-ne pe acest rezultat, putem deduce teoreme de punct fix, care extind un număr important de rezultate din literatură. Prima teoremă în acest sens este următoarea, care conţine estimări uniforme pentru distanţa la mulţimea punctelor de coincidenţă a două multifuncţii:

Teoerema 16 *Fie X, Y spaţii metrice, iar $F_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii astfel încât graficul uneia este complet, iar al celeilalte este închis. Presupunem că există $\alpha > 0$ şi $\overline{x} \in X$, $\overline{y} \in F_1(\overline{x})$, $\overline{z} \in F_2(\overline{x})$ astfel încât următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*
(i) F_1 este metric regulată pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{y}, \alpha)$ cu constanta $L > 0$;
(ii) F_2 are proprietatea Aubin pe $B(\overline{x}, \alpha) \times B(\overline{z}, \alpha)$ cu constanta $M > 0$;
(iii) $LM < 1$;
(iv) $d(\overline{y}, \overline{z}) \le \dfrac{\beta}{2}$, unde

$$\beta := \frac{\alpha}{2 \max\left\{1, \frac{1}{1 - LM}, \frac{L}{1 - LM}\right\}}. \tag{15}$$

Atunci $\mathrm{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1) \neq \emptyset$. *În plus, există $\theta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B(\overline{x}, \theta)$, şi orice $y \in B(\overline{y}, \theta)$,*

$$d(x, \mathrm{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1)) \le \frac{L}{1 - LM} \left[d(y, F_1(x) \cap B(\overline{y}, \theta)) + d(y, F_2(x) \cap B(\overline{z}, \theta)) \right] \tag{16}$$

şi

$$d(y, \mathrm{Fix}(F_2 \circ F_1^{-1})) \le \frac{1}{1 - LM} \left[LMd(y, F_1(x) \cap B(\overline{y}, \theta)) + d(y, F_2(x) \cap B(\overline{z}, \theta)) \right]. \tag{17}$$

În cazul $\alpha = \infty$, constanta θ poate fi luată egală cu ∞, iar concluzia are loc pentru $B(\overline{x}, \theta) = X$ şi $B(\overline{y}, \theta) = B(\overline{z}, \theta) = Y$.

În continuare, putem folosi Teorema 16 pentru a deduce estimări pentru excesul şi pentru distanţa Hausdorff între două mulţimi de puncte de coincidenţă, după cum se observă în următorul rezultat.

Teorema 17 *Fie X, Y spaţii metrice, $F_1, \Phi_1 : X \rightrightarrows Y$, $F_2, \Phi_2 : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu domenii nevide, astfel încât în perechile $(\operatorname{Gr} F_1, \operatorname{Gr} F_2)$ şi $(\operatorname{Gr} \Phi_1, \operatorname{Gr} \Phi_2)$, unul dintre grafice este complet, iar altul este închis. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(i) F_1, Φ_1 sunt metric regulate pe $X \times Y$ cu constanta $L > 0$;

(ii) F_2, Φ_2 au proprietatea Aubin pe $X \times Y$ cu constanta $M > 0$;

(iii) $LM < 1$.

Atunci

$$h(\operatorname{Fix}(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1), \operatorname{Fix}(F_2^{-1} \circ F_1)) \leq \frac{L}{1 - LM} \sup_{x \in X} \left[h(\Phi_1(x), F_1(x)) + h(\Phi_2(x), F_2(x))\right] \tag{18}$$

şi

$$h(\operatorname{Fix}(\Phi_2 \circ \Phi_1^{-1}), \operatorname{Fix}(F_2 \circ F_1^{-1})) \leq \frac{1}{1 - LM} \sup_{x \in X} \left[LMh(\Phi_1(x), F_1(x)) + h(\Phi_2(x), F_2(x))\right]. \tag{19}$$

Dacă $X = Y$, luând în rezultatul anterior în locul lui F_1 şi Φ_1 aplicaţia identitate pe X, se poate deduce cu uşurinţă următoarea generalizare a Lemei lui Lim (vezi [43, Lemma 1], [1, Theorem 3]). Observăm că prima estimare pe care o obţinem (i.e., (20) mai jos) rezultă din [7, Corollary 4].

Corolarul 18 *Fie X un spaţiu metric complet, $T_1, T_2 : X \rightrightarrows X$ multifuncţii cu grafice închise şi domenii nevide, care au proprietatea Aubin pe $X \times X$ cu constanta $M \in (0, 1)$. Atunci*

$$e(\operatorname{Fix}(T_1), \operatorname{Fix}(T_2)) \leq \frac{1}{1 - M} \sup_{x \in X} e(T_1(x), T_2(x)). \tag{20}$$

În consecinţă,

$$h(\operatorname{Fix}(T_1), \operatorname{Fix}(T_2)) \leq \frac{1}{1 - M} \sup_{x \in X} h(T_1(x), T_2(x)). \tag{21}$$

După cum s-a observat în mai multe lucrări, dintre care amintim [20], eficienţa problemelor de optimizare vectorială este incompatibilă cu deschiderea aplicaţiei obiectiv. În acest fel, condiţiile suficiente de deschidere devin, prin negaţie, condiţii necesare pentru optimalitate. Două aspecte importante intervin în acest cadru. Primul se referă la faptul că, în locul aplicaţiei obiectiv, notată spre exemplu prin $F : X \rightrightarrows Y$, se pot considera diverse aplicaţii de tip epigraf, cu menţinerea incompatibilităţii menţionate mai sus. Acest lucru a motivat studierea, în lucrarea [17], a proprietăţilor de regularitate în jurul punctului de referinţă a multifuncţiei $\mathcal{E}_F : X \times Y \rightrightarrows Y$ dată prin

$$\mathcal{E}_F(x, k) := \begin{cases} F(x) + k, & \text{dacă } k \in K, \\ \emptyset, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde prin K am notat un con convex inclus în Y. Un al doilea aspect are în vedere faptul că incompatibilitatea optimalitate − regularitate poate include o proprietate mai slabă decât deschiderea cu rată liniară în jurul punctului, şi anume deschiderea liniară în acel punct. Acest lucru a motivat analiza în detaliu, în lucrarea [2], a regularităţilor în punct pentru aplicaţii multivoce.

Vom prezenta mai jos principalele direcţii şi rezultate din lucrarea [17]. În esenţă, pentru a deduce regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$, am urmărit abordarea bazată pe rezultate de error-bounds pentru înfăşurătoarea inferior semicontinuă a distanţei $d(\cdot, \mathcal{E}_F(\cdot, \cdot))$, ce are următoarea formă

$$\varphi_{\mathcal{E}_F}((x, k), y) = \begin{cases} \liminf\limits_{u \to x} d(y, F(u) + k), & \text{dacă } k \in K, \\ +\infty, & \text{în rest.} \end{cases} \tag{22}$$

Aşa-numita 'strong slope' $|\nabla f|(x)$, introdusă de De Giorgi, Marino şi Tosques în [13] şi asociată unei funcţii inferior semicontinue f într-un punct x, este definită după cum urmează. Dacă $x \in \operatorname{dom} f := \{u \in X : f(u) < +\infty\}$, $|\nabla f|(x)$ este cantitatea definită prin $|\nabla f|(x) := 0$ dacă x este un minim local pentru f, şi prin $|\nabla f|(x) := \limsup_{y \to x, y \neq x} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}$, în rest. Pentru $x \notin \operatorname{dom} f$, definim $|\nabla f|(x) := +\infty$.

Următorul rezultat face legătura între estimarea inferioară a lui $|\nabla \varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot, \cdot), y)|(x, k)$ şi regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$.

Teoorema 19 *Fie X un spaţiu metric complet, Y un spaţiu Banach, K o mulţime închisă din Y şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu grafic închis. Presupunem că $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y}) \in X \times Y \times Y$ satisface $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{k} \in K$. Fie $m > 0$. Dacă există o vecinătate $U \times V \times W$ a lui $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ şi $\gamma > 0$ astfel încât*

$$|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k) \geq m \quad \forall (x,k,y) \in U \times V \times W \text{ cu } \varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k),y) \in (0,\gamma), \tag{23}$$

atunci există o vecinătate $\tilde{U} \times \tilde{V} \times \tilde{W}$ a lui $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ astfel încât

$$d((x,k),\mathcal{E}_F^{-1}(y)) \leq \frac{1}{m} d(y, F(x)+k) \quad \forall (x,k,y) \in \tilde{U} \times \tilde{V} \times \tilde{W}. \tag{24}$$

Cu alte cuvinte, $\mathcal{E}_F$ este metric regulată în jurul lui $((\overline{x}, \overline{k}), \overline{y})$.

O altă teoremă dă estimări inferioare în termeni de coderivate, pe spaţii Banach, pentru $|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|$. În rezultatul de mai jos $K^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle y^*, y\rangle \geq 0, \forall y \in K\}$ notează conul dual lui K. Coderivatele folosite, bazate pe un model axiomatic de subdiferenţială ∂ şi asociate acesteia, s-au notat prin D^*_∂.

Teorema 20 *Fie X, Y spaţii Banach, K un con convex şi închis din Y, iar F o multifuncţie cu grafic închis. Atunci pentru orice $(x, k_0, y) \in X \times K \times Y$ cu $y \notin F(x) + k_0$, avem*

$$|\nabla\varphi_{\mathcal{E}_F}((\cdot,\cdot),y)|(x,k_0) \geq \lim_{\rho\downarrow 0}\left\{\inf\left\{\|x^*\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \operatorname{Gr} F,\ u \in B(x,\rho), x^* \in D^*_\partial F(u,v)(y^*+z^*), \\ y^* \in K^* \cap S^*_Y,\ z^* \in \rho B^*_Y, \\ d(y,F(u)+k_0) \leq \varphi_{\mathcal{E}_F}((x,k_0),y)+\rho, \\ \|y-v-k_0\| \leq d(y,F(u)+k_0)+\rho, \\ |\langle y^*+z^*, v+k_0-y\rangle - d(y,F(u)+k_0)| < \rho \end{array}\right\}\right\}. \tag{25}$$

Combinând Teoremele 19 şi 20, deducem condiţii cu coderivate pentru regularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_F$.

Teorema 21 *Fie X, Y spaţii Banach, K un con convex şi închis din Y, iar F o multifuncţie cu grafic închis. Presupunem că $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y}) \in X \times Y \times Y$ satisface $\overline{y} \in F(\overline{x})$ şi $\overline{k} \in K$. Fie $m > 0$. Dacă există o vecinătate $U \times V \times W$ of $(\overline{x}, \overline{k}, \overline{y})$ şi $\gamma > 0$ astfel încât pentru orice $(x,k,y) \in U \times [V \cap K] \times W$ cu $y \notin F(x)+k$, să avem*

$$m \leq \lim_{\rho\downarrow 0}\left\{\inf\left\{\|x^*\| : \begin{array}{l} (u,v) \in \operatorname{Gr} F,\ u \in B(x,\rho), x^* \in D^*_\partial F(u,v)(y^*+z^*), \\ y^* \in K^* \cap S_{Y^*},\ z^* \in \rho B_{Y^*}, \\ d(y,F(u)+k) \leq \gamma+\rho, \\ \|y-v-k\| \leq d(y,F(u)+k)+\rho, \\ |\langle y^*+z^*, v+k-y\rangle - d(y,F(u)+k)| < \rho \end{array}\right\}\right\} \tag{26}$$

atunci $\mathcal{E}_F$ este metric regulată în jurul lui $((\overline{x}, \overline{k}), \overline{y})$.

Noţiunea de minim în raport cu ordinea generată de un con convex K pe Y este definită după cum urmează. Pentru o submulţime nevidă A a lui Y, un punct $\overline{y} \in A$ se numeşte minim Pareto pentru A în raport cu K (şi scriem $\overline{y} \in \operatorname{Min}(A,K)$) dacă $(A-\overline{y}) \cap (-K) \subset K$. În cazul în care conul este solid (i.e., are interior nevid), un punct $\overline{y} \in A$ se numeşte minim Pareto pentru A în raport cu K (şi scriem $\overline{y} \in \operatorname{WMin}(A,K)$) dacă $(A-\overline{y}) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset$.

Raportat la problema de optimizare

$$(P_1) \quad \operatorname{Min} F(x) \text{ pentru } x \in X,$$

un punct $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ se numeşte minim Pareto local dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât $\overline{y} \in \operatorname{Min}(F(U),K)$.

Rezultatul următor, ce exploatează incompatibilitatea dintre minimalitatea Pareto a unui punct $(\overline{x}, \overline{y})$ şi deschiderea lui $\mathcal{E}_F$ în $((\overline{x},0),\overline{y})$, furnizează condiţii necesare de optimalitate pentru problema (P_1).

Teorema 22 *Fie X, Y spaţii Banach şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu grafic închis astfel încât $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$. Presupunem că $K \subset Y$ este un con convex închis astfel încât $K \setminus (-K) \neq \emptyset$. Dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este un minim Pareto local pentru (P_1), atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in \operatorname{Gr} F \cap B((\overline{x}, \overline{y}), \varepsilon)$, $y^*_\varepsilon \in S_{Y^*} \cap K^*$, $z^*_\varepsilon \in \varepsilon B_{Y^*}$, astfel încât*

$$0 \in D^*_\partial F(u_\varepsilon, v_\varepsilon)(y^*_\varepsilon + z^*_\varepsilon) + \varepsilon B_{X^*}.$$

După cum spuneam mai sus, lucrarea [2] a fost dedicată analizei regularităţilor în punct pentru aplicaţii multivoce. S-au clasificat regularităţile în punct (sau subregularităţile) pentru multifuncţii în două categorii: în prima categorie am inclus deschiderea liniară în punct, proprietatea de pseudocalm şi cea de hemiregularitate metrică, iar în cea de a doua categorie am încadrat pseudo-deschiderea cu rată liniară, proprietatea de calm şi subregularitatea metrică; s-au arătat rezultate ce fac legăturile între cele două triplete şi s-a analizat cazul operatorilor liniari. Restul lucrării a fost împărţit după cum urmează:

- am arătat teoreme de tip multifuncţii implicite ce folosesc regularităţi în punct de al doilea tip;
- am studiat sisteme variaţionale parametrice în contextul regularităţilor în punct de tip II;
- am formulat condiţii de optimalitate pentru probleme de optimizare vectorială multivocă solidă (i.e., conul de ordonare are interior nevid).

Prezentăm în continuare rezultatele principale din această lucrare.

După cum am menţionat anterior, dată o multifuncţie $H : X \times P \rightrightarrows Y$, putem defini multifuncţia implicită $S : P \rightrightarrows X$ prin $S(p) := \{x \in X \mid 0 \in H(x,p)\}$.

Teoorema 23 *Fie X, P spaţii metrice, Y un spaţiu normat, $H : X \times P \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $(\overline{x}, \overline{p}, 0) \in \operatorname{Gr} H$. Notăm $H_p(\cdot) := H(\cdot, p)$, $H_x(\cdot) := H(x, \cdot)$.*

(i) Dacă $H_{\overline{p}}$ este pseudo-deschisă cu rată liniară de modul $c > 0$ în $(\overline{x}, 0)$, atunci există $\alpha, \beta > 0$ astfel încât, pentru orice $x \in B(\overline{x}, \alpha)$,

$$d(x, S(\overline{p})) \leq c^{-1} d(0, H(x, \overline{p}) \cap B(0, \beta)). \tag{27}$$

Dacă, în plus, H este calmă în raport cu p uniform în x în $((\overline{x}, \overline{p}), 0)$, atunci S este calmă în $(\overline{p}, \overline{x})$ şi

$$\operatorname{clm} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq c^{-1} \widehat{\operatorname{clm}}_p H((\overline{x}, \overline{p}), 0). \tag{28}$$

(ii) Dacă $H_{\overline{x}}$ este pseudo-deschisă cu rată liniară de modul $c > 0$ în $(\overline{p}, 0)$, atunci există $\gamma, \delta > 0$ astfel încât, pentru orice $p \in B(\overline{p}, \gamma)$,

$$d(p, S^{-1}(\overline{x})) \leq c^{-1} d(0, H(\overline{x}, p) \cap B(0, \delta)). \tag{29}$$

Dacă, în plus, H este calmă în raport cu x uniform în p at $((\overline{x}, \overline{p}), 0)$, atunci S metric subregulată în $(\overline{p}, \overline{x})$ şi

$$\operatorname{subreg} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq c^{-1} \widehat{\operatorname{clm}}_x H((\overline{x}, \overline{p}), 0). \tag{30}$$

În cazul în care H ia forma $H(x,p) := F(x,p) + G(x)$, au fost analizate regularităţile în jurul punctului ale multifuncţiei soluţie asociată sistemelor variaţionale parametrice în lucrările [4], [21]. În [2] am formulat condiţii ce asigură subregularitatea metrică şi proprietatea de calm a lui S. Menţionăm primul dintre acestea.

Teoorema 24 *Fie X, Y, P spaţii Banach, $F : X \times P \rightrightarrows Y$, $G : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii şi $(\overline{x}, \overline{p}, \overline{y}) \in X \times P \times Y$ astfel încât $\overline{y} \in F(\overline{x}, \overline{p})$ şi $-\overline{y} \in G(\overline{x})$. Presupunem îndeplinite următoarele condiţii:*
(i) F, G sunt local stabile la sumă în jurul lui $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}, -\overline{y})$;
(ii) F este calmă în raport cu x uniform în p în $((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y})$;
(iii) $F_{\overline{x}}$ este metric regulată în jurul lui $(\overline{p}, \overline{y})$;
(iv) G este calmă în $(\overline{x}, -\overline{y})$.
Atunci S este metric subregulată în $(\overline{p}, \overline{x})$. În plus, are loc relaţia:

$$\operatorname{subreg} S(\overline{p}, \overline{x}) \leq \operatorname{reg} F_{\overline{x}}(\overline{p}, \overline{y}) \cdot [\widehat{\operatorname{clm}}_x F((\overline{x}, \overline{p}), \overline{y}) + \operatorname{clm} G(\overline{x}, -\overline{y})]. \tag{31}$$

Fie funcţia $f : X \to Y$, multifuncţia $G : X \rightrightarrows Z$ şi problema de programare vectorială

$$(P_2) \quad \min f(x), \text{ pentru } x \in X, \ 0 \in G(x) + Q.$$

Q notează un con convex din Z. Ne-a interesat formularea de condiţii necesare pentru ca un punct $\overline{x} \in X$ să fie minim Pareto slab pentru problema (P_2) în raport cu un con convex $K \subset Y$, ceea ce ar însemna că $f(\overline{x}) \in \operatorname{WMin}(f(G^{-1}(-Q)), K)$. În acest sens, am considerat multifuncţia epigraf asociată lui G şi conului Q

dată de formula (22) şi am furnizat condiţii suficiente în termeni de coderivate (Fréchet) pentru subregularitatea metrică a lui $\mathcal{E}_G$.

De asemenea, analizând cazul solid, a fost utilă considerarea funţionalei de scalarizare Gesterwitz-Iwanov, dată în felul următor: pentru $e \in \operatorname{int} K$, definim $s_e : Y \to \mathbb{R}$ prin $s_e(z) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda e \in z + K\}$. După cum se cunoaşte, s_e este $d(e, \operatorname{bd}(K))^{-1}$-Lipschitz. Vom nota mai jos $d(e, \operatorname{bd}(K))^{-1}$ prin L_e (constanta Lipschitz pentru s_e). Rezultatele principale pe care le-am obţinut sunt următoarele.

Teeorema 25 *Presupunem că $\overline{x} \in G^{-1}(-Q)$ este un punct de minim slab Pareto pentru (P_2). Fixăm şi notăm cu $\overline{q}$ un punct în Q astfel încât $(\overline{x}, \overline{q}, 0) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$. Dacă f este $L-$Lipschitz $(L > 0)$ şi $\mathcal{E}_G$ este metric subregulată în $((\overline{x}, \overline{q}), 0)$ (cu modulul mai mare decât $M > 0$) atunci, pentru orice $e \in \operatorname{int} K$, $(\overline{x}, \overline{q}, 0)$ este un minim local pentru funcţia scalară*

$$(x, q, z) \longmapsto s_e \circ (f(x) - f(\overline{x})) + LL_eM \|z\|$$

cu restricţia $(x, q, z) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$.

Teeorema 26 *Fie X, Y, Z spaţii Asplund şi $\overline{x} \in G^{-1}(-Q)$ un minim Pareto slab pentru problema (P). Fie $\overline{q} \in Q$ astfel încât $(\overline{x}, \overline{q}, 0) \in \operatorname{Gr} \mathcal{E}_G$. Presupunem că*

(i) f este $L-$Lipschitz $(L > 0)$ şi strict Lipschitz în $\overline{x}$;

(ii) G are grafic închis;

(iii) $\mathcal{E}_G$ este metric subregulată în $((\overline{x}, \overline{q}), 0)$ (cu o constantă mai mică decât $M > 0$).

Atunci, pentru orice $e \in \operatorname{int} K$, există $y^* \in K^*$, $y^*(e) = 1$, $z^* \in Z^*$, $\|z^*\| \leq LL_eM$ astfel încât

$$(0, 0) \in \partial(y^* \circ f)(\overline{x}) \times \{0\} + D^*\mathcal{E}_G(\overline{x}, \overline{q}, 0)(z^*).$$

Lucrarea [27] pleacă de la observaţia că în ultimii ani literatura dedicată condiţiilor de optimalitate pentru minimalitatea Pareto tare folosind diferenţiabilitatea generalizată s-a dezvoltat foarte mult. Este ştiut faptul că abordarea cazului în care interiorul conului de ordonare este vid este o problemă dificilă, iar ceea ce ne-am propus în lucrarea menţiontă a fost să reconsiderăm unele tehnici de scalarizare şi într-un context în care acestea nu au mai fost utilizate. Ne ocupăm astfel de minimalitate Pareto atât în cazul pur geometric cât şi în cazul problemolor cu restricţii cu date netede.

In cazul geometric, am abordat problema evitării unor condiţii destul de tari ce apar în literatura de specialitate şi care se referă la închiderea înfăşurătoarei conice a unor sume de mulţimi. Unul dintre rezultatele obţinute, pe baza unei teoreme auxiliare ce se referă la caracterizări ale mulţimilor ce admit înfăşurătoare conică închisă este prezentat mai jos.

Propoziţia 27 *Fie Y un spaţiu normat, $M \subset Y$ şi C un con convex închis şi punctat. Presupunem că $\overline{y} \in M$ este minim Pareto pentru M în raport cu conul C iar M este local închisă în $\overline{y}$. In plus, considerăm o subdifferenţială abstractă ∂ având proprietăţi naturale minimale. Atunci pentru orice $c^0 \in C \setminus \{0\}$, există $\varepsilon > 0$ şi $y^* \in Y^*$, $y^*(c^0) = 1$ astfel încât*

$$-y^* \in N_\partial \left(\operatorname{cone}(M \cap D(\overline{y}, \varepsilon) - \overline{y} + c^0), 0 \right).$$

In lucrare, legat de această problematică, sunt descrise condiţii pentru ca multiplicatorul y^* din rezultatul anterior să fie pozitiv (i.e., $y^* \in C^*$).

Cazul funcţional are în vedere studiul problemei vectoriale cu restricţii

$$(P) \qquad \min f(x), \text{ subject to } g_i(x) \leq 0, \ i \in \overline{1, m}, \quad h_j(x) = 0, \ j \in \overline{1, k},$$

unde X, Y sunt spaţii Banach, $f : X \to Y$ este o funcţie vactorială iar $(g_i)_{i \in \overline{1,m}}, (h_j)_{j \in \overline{1,k}} : X \to \mathbb{R}$ sunt funcţii scalare. Pentru uşurinţa expunerii considerăm doar cazul datelor netede (toate funcţiile sunt de clasă C^1). Rezultatul principal al acestei secţiuni utilizează mai mulţi paşi intermediari ce au drept obiect obţinerea unor condiţii de tip Karush-Kuhn-Tucker prin intermediul unor reguli de calcul proprii subdifferenţialei Michel-Penot şi deducerea unor condiţii necesare de optimalitate pentru soluţii aproximative. Astfel, rezultatul principal menţionat vizează un proces de trecere la limită în cadrul condiţiilor anterior obţinute. Descriem acest mecanism şi rezultatul în cauză în cele ce urmează.

Spunem că C (con convex închis şi punctat) este topologic normal compact (pe scurt, (TNC)) în 0 dacă are loc următoare proprietate a şirurilor generalizate din C^*

$$\left[(x^*_\alpha) \subset C^*, x^*_\alpha \xrightarrow{w^*} 0 \right] \Rightarrow x^*_\alpha \to 0.$$

In schimb, conul C se numeşte secvenţial normal compact (pe scurt, (SNC)) în 0 dacă are loc următoare proprietate a şirurilor din C^*

$$\left[(y_n^*) \subset C^*, y_n^* \overset{w^*}{\to} 0\right] \Rightarrow y_n^* \to 0,$$

Evident, (TNC) implică (SNC), dar reciproca nu este în general adevărată.

Teorema 28 *Presupunem că are loc condiţia de calificare Mangasarian-Fromovitz în $\overline{x}$ care este punct de minim Pareto pentru (P). In oricare din următoarele situaţii:*

(a) bila unitate închisă din Y^* este w^*-secvenţial compactă şi C este (SNC) în 0;

(b) C este (TNC) în 0;

are loc următoarea concluzie: pentru orice $e \in C$, $\|e\| = 1$ există $y^* \in C^* \setminus \{0\}$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$, $\mu \in \mathbb{R}^k$ a.î. $\lambda_i g_i(\overline{x}) = 0$, $\forall i \in \overline{1,m}$ şi

$$y^* \circ \nabla f(\overline{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\overline{x}) + \sum_{j=1}^{k} \mu_i \nabla h_j(\overline{x}) = 0.$$

În lucrarea [3] studiem o nouă metodă de a penaliza problemele de optimizare scalară vectorială, prin intermediul unei funcţii cunoscută în literatură ca funcţia timp minimal direcţională, ale cărei proprietăţi au fost analizate în mod sistematic în lucrarea [50].

Merită menţionat faptul că există deja două metode clasice de a penaliza problemele de optimizare. Dacă se notează cu M mulţimea punctelor admisibile (mulţimea restricţiilor), o primă metodă, directă, este aşa-numita "penalizare infinită", unde termenul de penalizare este dat de funcţia indicatoare a mulţimii M : $i_M(x) = 0$ dacă $x \in M$ şi $i_M(x) = \infty$, dacă $x \notin M$. Cealaltă metodă clasică de penalizare îi aparţine lui Clarke (vezi [10, Proposition 2.4.3]) şi foloseşte funcţia distanţă asociată mulţimii M. Această abordare a fost recent extinsă la optimizarea vectorială în [60]. Comparativ cu aceste două metode, termenul de penalizare propus de noi, dat de funcţia timp minimal direcţională, este unul hibrid, deoarece în afara mulţimii M poate lua valori în $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Arătăm în lucrare că această funcţie este potrivită pentru a penaliza principalele tipuri de probleme cu restricţii geometrice: problemele scalare şi vectoriale cu conuri de ordonare solide şi nonsolide. De asemenea, folosim obiectele de diferenţiere generalizată de tip Mordukhovich în formularea unor condiţii necesare de optimalitate pentru punctele de minim Pareto asociate unei probleme unde funcţia obiectiv este direcţional Lipschitz.

Prezentăm în continuare, pe scurt, principalele rezultate. Reamintim că, dacă X este un spaţiu liniar normat, $u \in X \setminus \{0\}$ este un element, iar $\emptyset \neq M \subset X$ este o mulţime închisă, definim funcţia timp minimal direcţională prin $T_u(\cdot, M) : X \to [0, \infty]$,

$$T_u(x, M) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tu \in M\}, \tag{32}$$

cu convenţia $\inf \emptyset = +\infty$.

Fie problema de optimizare scalară

$$(\mathcal{P}_s) \ \ \min s(x) \text{ a.î. } x \in M.,$$

unde $s : X \to R \cup \{+\infty\}$.

Următoarea teoremă arată că funcţia $T_u(\cdot, M)$ furnizează un termen exact de penalizare pentru (P_s).

Teorema 29 *Presupunem că $s : X \to R \cup \{+\infty\}$ este local Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$ relativ la domeniul său cu constanta $L > 0$ şi $\overline{x} \in M \cap \operatorname{dom} s$ este o soluţie locală pentru (P_s). Atunci pentru orice $u \in X \setminus \{0\}$, $\overline{x}$ este un minim local (fără restricţii) al funcţiei $s + L\|u\| T_u(\cdot, M)$.*

Trecând la cazul vectorial, considerăm Y, un spaţiu liniar normat, parţial ordonat de un con convex, închis, propriu şi punctat K. Pentru a acoperi cât mai multe situaţii, facem câteva convenţii naturale legate de multiplicarea între $\pm\infty$ şi elementele nenule din K. În plus, deoarece dorim să acoperim cazul funcţiilor cu valori reale extinse, îi adăugăm lui Y două elemente abstracte şi distincte $-\infty_K, +\infty_K$, care nu sunt din Y, şi notăm $\overline{Y} := Y \cup \{-\infty_K, +\infty_K\}$. Regulile de ordine şi algebrice de care avem nevoie pentru aceste două elemente sunt cele uzuale.

Fie funcţia $v : X \to Y \cup \{+\infty_K\}$ şi $M \subset \operatorname{dom} v := \{x \in X \mid v(x) \in Y\}$ o mulţime închisă. Atunci considerăm problema generală de optimizare vectorială

$$(\mathcal{P}_v) \ \ \min v(x) \text{ a.î. } x \in M,$$

unde minimul este luat în sensul clasic (slab sau tare) Pareto. Reamintim că un punct admisibil $\overline{x}$ se numeşte minim local slab Pareto pentru (P_v) dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$ şi există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice punct admisibil x din V, are loc $v(x) - v(\overline{x}) \notin -\operatorname{int} K$. De asemenea, un punct admisibil $\overline{x}$ se numeşte minim local Pareto pentru (P_v) dacă există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ a.î. pentru orice punct admisibil x din V, are loc $v(x) - v(\overline{x}) \notin -K \setminus \{0\}$ (această ultimă noţiune operează şi în cazul în care $\operatorname{int} K = \emptyset$). În variantele globale ale definiţiilor de mai sus se înlocuieşte V cu X.

De asemenea, spunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L > 0$ pe o mulţime $S \subset X$ dacă există un element $e \in K \setminus \{0\}$ astfel încât pentru orice $x', x'' \in S$

$$v(x'') + L \|x'' - x'\| e - v(x') \in K.$$

Au loc următoarele rezultate.

Teoerema 30 *În notaţiile de mai sus, presupunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L > 0$ pe X şi fie $e \in K \setminus \{0\}$ elementul dat de această condiţie. Fie $u \in X \setminus \{0\}$.*

(i) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim local slab Pareto pentru (P_v), atunci este un minim local slab Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L \|u\| T_u(\cdot, M)e$.

(ii) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim global slab Pareto pentru (P_v), atunci este un minim global slab Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L \|u\| T_u(\cdot, M)e$.

Teoerema 31 *În notaţiile de mai sus, presupunem că v este $K-$Lipschitz de rang $L > 0$ pe X şi fie $e \in K \setminus \{0\}$ elementul dat de această condiţie. Fie $u \in X \setminus \{0\}$.*

(i) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim local Pareto pentru (P_v), atunci este un minim local Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L' \|u\| T_u(\cdot, M)e$ pentru orice $L' > L$.

(ii) Dacă $\overline{x} \in M$ este un minim global Pareto pentru (P_v), atunci este un minim global Pareto (fără restricţii) pentru funcţia $v(\cdot) + L' \|u\| T_u(\cdot, M)e$ pentru orice $L' > L$.

Pentru formularea condiţiilor necesare de optimalitate, folosim, după cum am menţionat mai sus, obiecte de diferenţiere generalizată de tip Mordukhovich. De asemenea, exploatăm un principiu ce asertează incompatibilitatea dintre optimalitate şi deschiderea unei multifuncţii de tip epigraf asociată unei probleme de optimizare vectorială (vezi [20]), precum şi o teoremă ce conţine condiţii suficiente în termenii coderivatelor Fréchet pentru deschiderea liniară a sumei a două multifuncţii (vezi [21]).

Principalul rezultat legat de condiţii de optimalitate în cazul problemelor vectoriale cu restricţii geometrice este prezentat în continuare. O mulţime $M \subset X$ se numeşte epi-Lipschitz în $\overline{x} \in X$ în direcţia $u \neq 0$ dacă există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $\omega \in M \cap B(\overline{x}, \delta)$, $z \in B(u, \delta)$ şi $\lambda \in [0, \delta]$, are loc $\omega + \lambda z \in M$.

Teoerema 32 *Fie X şi Y spaţii Asplund. Considerăm problema (P_v) şi presupunem că $\overline{x} \in M$ este un minim Pareto local pentru (P_v). De asemenea, presupunem că:*

(i) v este $K-$Lipschitz de rang $L > 0$ pe X, iar $e \in K \setminus \{0\}$ este elementul dat de această condiţie Lipschitz;

(ii) există un $u \in X \setminus \{0\}$ astfel încât M este epi-Lipschitz în $\overline{x}$ în direcţia u;

(iii) K este (SNC) în 0

Atunci pentru orice $L' > L$, există $y^* \in K^* \setminus \{0\}$ şi $x^* \in D^* v(\overline{x})(y^*)$ astfel încât

$$-x^* \in N(M, \overline{x}),$$

şi

$$x^*(u) \leq L' \|u\| y^*(e).$$

În lucrarea [63], pe lângă alte rezultate, punem în evidenţă şi utilizarea quasi-interiorului (relativ) al unei mulţimi convexe în obţinerea unor condiţii de optimalitate şi dualitate în optimizarea vectorială. Începem prin a aminti câteva noţiuni de eficienţă (minimalitate) în raport cu ordinea indusă de un con convex punctat $C \subset Y$, unde Y este un spaţiu local convex. Fie $\emptyset \neq E \subset Y$; considerăm mulţimile

$$\begin{aligned}
\operatorname{Min}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-C) = \{0\}\}, \\
\operatorname{WMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-\operatorname{int} C) = \emptyset\} \quad (\text{când } \operatorname{int} C \neq \emptyset), \\
\operatorname{BMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+ (E + C - a)) \cap (-C) = \{0\}\}, \\
\operatorname{QMin}(E, C) &:= \{a \in E \mid (E - a) \cap (-\operatorname{qri} C) = \emptyset\} \quad (\text{când } \operatorname{qri} C \neq \emptyset).
\end{aligned}$$

Amintim că pentru o mulţime convexă nevidă $A \subset Y$, $\operatorname{qri} A := \{a \in A \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+(A-a)) \text{ este spaţiu liniar}\}$, iar $\operatorname{qi} A := \{a \in A \mid \operatorname{cl}(\mathbb{R}_+(A-a)) = Y\}$. Când C are o bază B, adică $B \subset C$ este o mulţime convexă astfel încât $0 \notin \operatorname{cl} B$ şi $C = \mathbb{R}_+ B$, definim

$$\operatorname{HMin}(E, B) := \cup\{\operatorname{Min}(E, \mathbb{R}_+(B+U)) \mid U \in \mathcal{N}_Y^c,\ (2U) \cap B = \emptyset\},$$

unde $\mathcal{N}_Y^c$ este clasa vecinătăţilor deschise, convexe şi simetrice ale lui $0 \in Y$; este clar că pentru $U \in \mathcal{N}_Y^c$ cu $(2U) \cap B = \emptyset$ avem că $Q := \mathbb{R}_+(B+U)$ este un con convex punctat cu $\operatorname{int} Q = \mathbb{P}(B+U)$. Este (aproape) evident că $\operatorname{HMin}(E, B) \subset \operatorname{Min}(E, C)$.

Dacă $\operatorname{int} C \neq \emptyset$ atunci $\operatorname{Min}(E, C) \subset \operatorname{WMin}(E, C) = \operatorname{QMin}(E, C)$. Presupunând că $0 \notin \operatorname{qri} C \neq \emptyset$, avem că $\operatorname{Min}(E, C) \subset \operatorname{QMin}(E, C)$; totuşi, dacă $0 \in \operatorname{qri} C$ atunci $\operatorname{qri} C = C$ şi $\operatorname{QMin}(E, C) = \emptyset$. De fapt $0 \in \operatorname{qri} C \Leftrightarrow 0 \in \operatorname{qri}(\operatorname{cl} C) \Leftrightarrow \operatorname{cl} C$ este spaţiu liniar $\Leftrightarrow C^+$ este a spaţiu liniar (şi $0 \in \operatorname{qi} C \Leftrightarrow \operatorname{cl} C = X \Leftrightarrow C^+ = \{0\}$). Luând în considerare observaţiile precedente, în cele ce urmează presupunem că $0 \notin \operatorname{qri} C$. In plus, este evident că $\operatorname{BMin}(E, C) \subset \operatorname{Min}(E, C)$.

După cum se ştie, $\operatorname{Max}(E, C) := \operatorname{Min}(E, -C)$, şi similar pentru celelalte noţiuni Max.

Considerăm acum $F : S \rightrightarrows Y$ şi $G : S \rightrightarrows Z$ două multifuncţii cu $\emptyset \neq S = \operatorname{dom} F = \operatorname{dom} G$, unde Y, Z sunt spaţii local convexe separate Hausdorff, ordonate de conurile convexe C, respectiv K. Considerăm problema de minimizare

(VP) $C\text{-}\min_{x \in M} F(x)$,

unde $M := \{x \in S \mid G(x) \cap (-K) \neq \emptyset\}$; desigur, $G(x) \cap (-K) \neq \emptyset \Leftrightarrow 0 \in G(x) + K$.

Fie $x_0 \in M$ şi $y_0 \in F(x_0)$. Spunem că (x_0, y_0) este soluţie (resp. soluţie slabă, quasi-slabă) a lui (VP) dacă $y_0 \in \operatorname{Min}(F(M), C)$ (resp. $y_0 \in \operatorname{WMin}(F(M), C)$, $y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C)$). Noţiunea de soluţie quasi-slabă a fost introdusă în [56, Def. 2.17] (cu acelaşi nume) în cazul în care $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi în [68].

In spiritul tezei lui T.N. Tasset [56], considerăm mulţimea

$$\mathcal{E} := (F \times G)(S) + C \times K,$$

unde $F \times G : S \rightrightarrows Y \times Z$, $(F \times G)(x) := F(x) \times G(x)$ pentru $x \in S$. Desigur, $F \times G$ este convexlike atunci când $\mathcal{E}$ este convexă. Deoarece $G(S) + K = \operatorname{Pr}_Z(\mathcal{E})$, $G(S) + K$ este convexă dacă $\mathcal{E}$ este convexă. Observăm că $F \times G$ este $C \times K$-convexă (şi deci $\mathcal{E}$ este convexă) atunci când S este o submulţime convexă a unui spaţiu liniar, F este C-convexă şi G este K-convexă.

Rezultatul următor corespunde celui din [56, Th. 3.3].

Propoziţia 33 *Fie $F \times G$ convexlike. Presupunem că* (a) $x_0 \in M$ *şi* $y_0 \in F(x_0)$, (b) $(y_0, 0) \notin \operatorname{qi} \mathcal{E}$ *şi* (c) $0 \in \operatorname{qi}(G(S) + K)$. *Atunci* (d) *există $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$ şi $z^* \in K^+$ astfel încât $\langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle y_0, y^* \rangle$ pentru orice $(y, z) \in (F \times G)(S)$.*

Invers, presupunem că (a) *şi* (d) *sunt verificate. Atunci au loc* (b) *şi* (e) $z^*\big(G(x_0) \cap (-K)\big) = \{0\}$*; în plus, dacă $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ atunci au loc* (b') $(y_0, 0) \notin \operatorname{qri} \mathcal{E}$ *şi* (f) $y_0 \in \operatorname{QMin}(F(M), C)$, *adică (x_0, y_0) este o soluţie quasi-slabă pentru (VP).*

Condition (c) în Propoziţia 33 este mai slabă, atunci când G este convexlike, decât condiţia de tip Slater (c') $G(\overline{x}) \cap (-\operatorname{qi} K) \neq \emptyset$ pentru un $\overline{x} \in S$; într-adevăr, $G(S) + K$ fiind convexă,

$$0 \in G(\overline{x}) + \operatorname{qi} K \subset (G(S) + K) + \operatorname{qi} K \subset \operatorname{qi}(G(S) + K + K) = \operatorname{qi}(G(S) + K).$$

Remark 34 Teorema 3.3 din [56] stabileşte că (a) $\wedge$ (b') $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\wedge$ (e) atunci când F este C-convexă, G este K-convexă şi $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$; [56, Cor. 3.4] este [56, Th. 3.3] în care (c) este înlocuit prin (c'). Notăm de asemenea că în cazul în care $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi $\operatorname{qi} K \neq \emptyset$ avem că $\overline{\operatorname{aff}} \mathcal{E} = Y \times Z$, şi astfel $\operatorname{qri} \mathcal{E} = \operatorname{qi} \mathcal{E}$.

Rezultatul următor corespond celui din [56, Th. 3.7]; aici $L^+(Z, Y) := \{T \in L(Z, Y) \mid T(K) \subset C\}$.

Propoziţia 35 *Fie $F \times G$ convexlike şi fie $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$. Presupunem că* (a) *şi* (d) *din Propoziţia 33 au loc. Atunci există $T \in L^+(Z, Y)$ astfel încât $y_0 \in \operatorname{QMin}((F + T \circ G)(S), C)$ şi $T(G(x_0) \cap (-K)) = \{0\}$.*

Remark 36 Teorema 3.7 din [56] stabileşte că are loc concluzia Propoziţiei 35 atunci când F este C-convexă, G este K-convexă, $\operatorname{qi} C \neq \emptyset$ şi (a), (f), (b'), (c) sunt verificate; după cum se vede din Propoziţia 33, condiţia (f) poate fi transferată de la ipoteză la concluzia Teoremei 3.7 din [56].

Ca în [56], problemei (VP) îi asociem multifuncţia Lagrange

$$\mathcal{L} : S \times L^+ \rightrightarrows Y, \quad \mathcal{L}(x,T) := F(x) + T(G(x)),$$

unde $L^+ := L^+(Z,Y)$, şi multifuncţia obiectiv duală

$$\Psi : L^+ \rightrightarrows Y, \quad \Psi(T) := \mathrm{QMin}\left(L(\cdot,T)(S), C\right).$$

Corolarul 37 *Fie $F \times G$ convexlike şi fie* $\mathrm{qi}\, C \neq \emptyset$. *Presupunem că* (a), (b) *şi* (c) *din Propoziţia 33 sunt îndeplinite. Atunci*

$$y_0 \in \mathrm{QMin}(F(M), C) \cap \mathrm{QMax}\left(\Psi(L^+), C\right).$$

Remark 38 Teorema 3.10 din [56] stabileşte că $y_0 \in \mathrm{QMin}(F(M), C)$ dacă şi numai dacă $y_0 \in \mathrm{QMax}\,(\Psi(L^+), C)$ atunci când F este C-convexă, G este K-convexă, $\mathrm{qi}\, C \neq \emptyset$ şi (a), (b'), (c) sunt verificate; concluzia Teoremei 3.10 din [56] este mult mai slabă decât cea a Corolarului 37. Observăm de asemenea că concluzia $\overline{y} \in \mathrm{QMin}(F(x_0), C)$ a Teoremei 3.9 din [56] (pentru $x_0 \in M$ şi $\overline{y} \in \Psi(L^+)$) nu este corectă deoarece $\overline{y}$ nu este în mod necesar în $F(x_0)$; relaţia corectă de dualitate slabă este

$$\left(F(M) - \psi(L^+)\right) \cap (-\,\mathrm{qi}\, C) = \emptyset.$$

Rezultatele menţionate mai sus pot fi utilizate pentru studierea punctelor eficiente în sens Henig, adică elementele mulţimii $\mathrm{HMin}(F(M), B)$, în cazul în care B este o bază a lui C. In această situaţie luând $C_U^B := \mathbb{R}_+(B + U)$ cu $U \in \mathcal{N}_Y^c$, $(2U) \cap B = \emptyset$, avem că $\mathrm{qi}\, C_U^B = \mathrm{int}\, C_U^B = C_U^B \setminus \{0\}$ şi

$$(C_U^B)^+ = \{y^* \in Y^* \mid \inf y^*(B) \geq 2 \sup y^*(U)\} \subset \{0\} \cup C_B^\Delta,$$

unde

$$C_B^\Delta := \{y^* \in Y^* \mid \inf y^*(B) > 0\} \subset C^\#.$$

Fie

$$\mathcal{E}_U^B := (F \times G)(S) + C_U^B \times K.$$

Deoarece $C \times K \subset C_U^B \times K$, $F \times G$ este $C_U^B \times K$-convexlike dacă $F \times G$ este $C \times K$-convexlike.

Rezultatul următor corespunde celui din [56, Th. 4.3].

Propoziţia 39 *Fie $F \times G$ $C \times K$-convexlike şi B o bază a lui C. Presupunem că* (a) $x_0 \in M$ *şi* $y_0 \in F(x_0)$, (b) *există $U \in \mathcal{N}_Y^c$ astfel încât $(2U) \cap B = \emptyset$ şi* $(y_0, 0) \notin \mathrm{qi}\, \mathcal{E}_U^B$, (c) $0 \in \mathrm{qi}(G(S) + K)$. *Atunci* (d) *există* $y^* \in C_B^\Delta$ *şi $z^* \in K^+$ astfel încât $\langle y, y^* \rangle + \langle z, z^* \rangle \geq \langle y_0, y^* \rangle$ pentru orice $(y,z) \in (F \times G)(S)$.*

Invers, presupunem că (a) *şi* (d) *sunt verificate. Atunci au loc următoarele:* (b') *(adică condiţia* (b) *cu* qi *înlocuit prin* qri*),* (e) $z^*\left(G(x_0) \cap (-K)\right) = \{0\}$ *şi* (f) $y_0 \in \mathrm{HMin}(F(M), B)$.

Remark 40 Teorema 4.3 din [56] stabileşte că (a) $\wedge$ (f) $\wedge$ (b') $\wedge$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\wedge$ (e) şi (a) $\wedge$ (d) $\wedge$ (e) $\Rightarrow$ (b') $\wedge$ (f) atunci când F este C-convexă, G este K-convexă şi B este o bază a lui C. Să observăm că (practic) singura diferenţă dintre [56, Th. 4.3] şi [34, Th. 3.1] este că condiţia (b') de mai sus este înlocuită printr-o altă condiţie (b) (mai complicată); de fapt, în ipoteza că condiţiile (a) şi (c) de mai sus sunt îndeplinite, condiţiile (b), (b') şi (b) din [34, Th. 3.1] sunt echivalente.

Se poate arăta că mai multe rezultate din [68] se pot obţine în condiţii mult mai slabe, dar nu mai dăm detalii aici.

Fie X, Y be spaţii liniare normate şi $C \subset Y$ un con convex propriu. C este normal dacă $[U_Y]_C$ este mărginit, unde U_Y este discul unitate din Y, şi $[A]_C := (A + C) \cap (A - C)$. Pentru $y, y' \in Y$ scriem $y \leq_C y'$ atunci când $y' - y \in C$. Lui Y îi adăugăm un element $\infty \notin Y$ obţinând astfel $Y^\bullet := Y \cup \{\infty\}$; considerăm că $y + \infty := \infty$, $\lambda\infty := \infty$ şi $y \leq_C \infty$ pentru $y \in Y$ şi $\lambda \in (0, \infty)$. Funcţia $f : X \to Y^\bullet$ este C-convexă dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x') \leq_C \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x') \quad \forall x, x' \in X,\ \lambda \in (0,1).$$

Domeniul lui f este mulţimea $\mathrm{dom}\, f := \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$. Spunem că funcţia $f : X \to Y^\bullet$ este C-mărginită superior pe mulţimea $A \subset X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $F(A) \subset rU_Y - C$; deci $A \subset \mathrm{dom}\, f$ dacă f este C-mărginită superior pe mulţimea $A \subset X$.

In [57] am obţinut the următorul rezultat.

Teeorema 41 *Fie X, Y spaţii liniare normate, $C \subset Y$ un con convex propriu, şi $f : X \to Y^{\bullet}$ o funcţie C-convexă. Presupunem că C este con convex normal şi f este C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Atunci f este lipschitziană în jurul lui x_0; în plus, f este local lipschitziană pe* $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$.

In cazul în care există $y_0 \in Y$ şi o vecinătate U a lui x_0 astfel încât $f(U) \subset y_0 - C$, rezultatul anterior a fost obţinut de Borwein [9].

Inainte de a stabili versiunea multivocă a rezultatului precedent menţionăm că $F : X \rightrightarrows Y$ este C-mărginită inferior (resp. slab C-mărginită superior) pe mulţimea $A \subset X$ dacă există $r > 0$ astfel încât $F(A) \subset rU_Y + C$ (resp. $F(x) \cap (rU_Y - C) \neq \emptyset$ pentru orice $x \in A$).

Teeorema 42 *Fie X, Y spaţii normate, C un con convex propriu, şi $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie C-convexă. Dacă F este C-mărginită inferior şi slab C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$, atunci F este C-lipschitziană în jurul lui x_0, adică există o vecinătate U a lui x_0 şi $l \in \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$F(x) \subset F(x') + l \,\|x - x'\|\, U_Y + C \quad \forall x, x' \in U;$$

în plus, F este local C-lipschitziană pe $\operatorname{int}(\operatorname{dom} F)$.

Ipoteza teoremei precedente este mult mai slabă decât cea din [46, Th. 2.9] unde X este finit dimensional şi C^+ este finit generat şi punctat.

Am aplicat aceste rezultate unor problem de optimizare vectorială şi multivocă. Considerăm mai întâi următoarea problemă de optimizare vectorială:

$$\min \quad f(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in D, \tag{VP}$$

unde X, Y sunt spaţii Asplund, $f : X \to Y$ este o funcţie, $D \subset X$ şi C este un con convex, închis şi punctat din Y. Lui $f : X \to Y$ şi $F : X \rightrightarrows Y$ le asociem multifuncţiile $\mathcal{E}_f, \mathcal{E}_F : X \rightrightarrows Y$ cu $\operatorname{gph} \mathcal{E}_f := \operatorname{gph} f + \{0\} \times C$ şi $\operatorname{gph} \mathcal{E}_F := \operatorname{gph} F + \{0\} \times C$. Pentru o mulţime $\Omega \subset X$ şi $\overline{x} \in \Omega$ cu proprietatea că Ω este închisă în jurul lui $\overline{x}$, adică $\Omega \cap U$ este închisă pentru o vecinătate U a lui $\overline{x}$, notăm prin $N_L(\overline{x}, \Omega)$ conul normal în sensul lui Mordukhovich asociat lui Ω în $\overline{x}$. Pentru multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$ şi $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$ cu proprietatea că $\operatorname{gph} F$ este închis în jurul lui $(\overline{x}, \overline{y})$, $D^*F(\bar{x}, \overline{y})\colon Y^* \rightrightarrows X^*$ este coderivata în sensul lui Mordukhovich asociată lui F în $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$, şi este definită prin

$$D^*F(\bar{x}, \overline{y})(y^*) := \big\{x^* \in X^* \mid (x^*, -y^*) \in N_L\big((\bar{x}, \overline{y}); \operatorname{gph} F\big)\big\}; \tag{33}$$

omitem $\overline{y} = f(\bar{x})$ în (33) atunci când $f\colon X \to Y$ şi $F(x) = \{f(x)\}$ pentru $x \in X$. Subdiferenţiala în sensul lui Mordukhovich a lui $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ în $\bar{x} \in X$ cu $|f(\bar{x})| < \infty$ este notată prin $\partial_L f(\bar{x})$ şi este definită prin

$$\partial_L f(\bar{x}) := \big\{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N_L\big((\bar{x}, f(\bar{x})); \operatorname{epi} f\big)\big\};$$

punem $\partial_L f(\bar{x}) := \emptyset$ dacă $|f(\bar{x})| = \infty$.

Teeorema 43 *Fie C un con convex, închis şi normal din Y având interior nevid, $\emptyset \neq D \subset X$, şi $f : X \to Y$ o funcţie C-convexă. Fie $\bar{x} \in D$ o soluţie Pareto în sens slab pentru* (VP)*. Dacă f este C-mărginită superior pe o vecinătate U a lui $\bar{x}$, şi mulţimea D este închisă în jurul lui $\overline{x}$, atunci există $y^* \in C^+ \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$0 \in \partial(y^* \circ f)(\overline{x}) + N_L(\bar{x}; D).$$

In cazul în care C are interiorul vid avem rezultatul următor.

Teeorema 44 *Fie C un con convex, închis şi normal din Y cu interiorul vid, $\emptyset \neq D \subset X$ şi $f : X \to Y$ o funcţie C-convexă. Fie $\bar{x} \in D$ soluţie Pareto a lui* (VP) *şi $\overline{y} = f(\bar{x})$. Presupunem că f este C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $\bar{x} \in D$, şi că mulţimea D este închisă în jurul lui $\overline{x}$. Mai presupunem că* $\operatorname{cone}(f(D) + C - \overline{y})$ *este închis; atunci pentru orice $e \in C \setminus \{0\}$, există $y^* \in C^+$ cu $y^*(e) = 1$ astfel încât*

$$0 \in \partial(y^* \circ f)(\overline{x}) + N_L(\bar{x}; D).$$

In rezultatul următor stabilim condiţii necesare pentru soluţiile următoarei probleme de minimizare multivocă:

$$\min \quad F(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in D, \tag{SP}$$

unde, ca mai sus, X, Y sunt spaţii Asplund, $F : X \rightrightarrows Y$ este o multifuncţie, C este un con convex, închis, propriu şi punctat din Y, iar $D \subset X$.

Teeorema 45 *Fie X, Y spaţii Asplund, C un con convex, închis propriu şi punctat din Y, şi $\emptyset \neq D \subset X$. Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie C-convexă şi $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{gph} F$ o soluţie în sens Pareto a problemei* (SP). *Presupunem că F este C-mărginită inferior şi slab C-mărginită superior pe o vecinătate a lui $\bar{x}$,* $\operatorname{epi} F$ *este închisă în jurul lui $(\bar{x}, \bar{y})$, şi D este închisă în jurul lui $\bar{x}$. Mai presupunem că* $\operatorname{cone}\big(F(D) + C - \bar{y}\big)$ *este închis; atunci pentru orice $e \in C \setminus \{0\}$, există $y^* \in C^+$ cu $y^*(e) = 1$ astfel încât*

$$0 \in D^* \mathcal{E}_F(\bar{x}, \bar{y})(y^*) + N_L(\bar{x}; D). \tag{34}$$

În lucrarea [18] studiem un nou tip de funcţie timp minimal. Funcţia timp minimal a fost studiată în mai multe lucrări, pornind de la ipoteze variate asupra spaţiului X şi a mulţimilor M şi Ω, în diferite scopuri. În abordarea noastră, M este o submulţime a sferei unitate a unui spaţiu Banach X, o situaţie mai potrivită scopului propus: explorarea unor proprietăţi direcţionale privind principalele obiecte ale analizei variaţionale: mulţimi, funcţii, multifuncţii, programare matematică scalară şi vectorială.

Această direcţie nu a fost incă abordată în literatură astfel încât lucrarea [18] este dedicată studiului proprietăţilor funcţiei timp minimal propusă, care sunt esenţiale pentru aplicaţii: inferioară semicontinuitate, convexitate, proprietatea Lipschitz, calcul subdiferenţial. La final am prezentat o aplicaţie pentru o problemă de locaţie.

Prezentăm, pe scurt, principalele rezultate.

Definiţie şi proprietăţi

Reamintim că dacă X este un spaţiu liniar normat real iar $u \in X \setminus \{0\}$ este un element şi $\emptyset \neq \Omega \subset X$ este o submulţime închisă, funcţia timp minimal este definită prin $T_u(\cdot, M) : X \to [0, \infty]$,

$$T_u(x, M) := \inf\{t \geq 0 \mid x + tu \in M\},$$

cu convenţia $\inf \emptyset = +\infty$. În această formă, funcţia timp minimal a fost sistemtic analizată în [50].

În lucrarea noastră, [18], am considerat un spaţiu normat X, şi două submlţimi nevide $\Omega \subset X$, $M \subset S_X$ (sfera unitate a lui X). Atunci, funcţia timp minimal în raport cu direcţiile oferite de M este $T_M(\cdot, \Omega) : X \to [0, \infty]$ dată prin

$$T_M(x, \Omega) := \inf\{t \geq 0 \mid \exists u \in M : x + tu \in \Omega\}.$$

În majoritatea lucrărilor legate de funcţia timp minimal mulţimea M este considerată o vecinătate convexă, închisă, a originii iar acest fapt permite utilizarea funcţionalei Minkovski şi a multor instrumente din analiza convexă, dar se restrânge în acelaşi timp aplicabilitatea. În [18] am considerat M ca submulţime a sferei unitate, astfel încât M nu este întotdeauna convexă şi niciodată o vecinătate a originii crescând dificultatea studiului.

Desigur, $T_M(x, \Omega)$ corespunde cazului $T_u(x, \Omega)$ dacă $M := \{u\}$. Câteva proprietăţi de bază sunt prezentate în următoarea propoziţie. Ca de obicei, domeniul de definiţie al lui $T_M(\cdot, \Omega)$ este

$$\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) := \{x \in X \mid T_M(x, \Omega) < \infty\}.$$

Propoziţia 46 *(i) Domeniul funcţiei timp minimal în respect cu M este*

$$\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) = \Omega - \operatorname{cone} M.$$

(ii) Are loc relaţia

$$T_M(x, \Omega) = \inf_{u \in M} T_u(x, \Omega). \tag{35}$$

(iii) Penrtu orice $x \in X$ avem

$$d(x, \Omega) \leq T_M(x, \Omega). \tag{36}$$

Dacă $M = S_X$, atunci $\operatorname{dom} T_M(\cdot, \Omega) = X$ *şi*

$$T_M(x, \Omega) = d(x, \Omega), \quad \forall x \in X. \tag{37}$$

(iv) Dacă $\Omega, \Theta \subset X$, şi $M, L \subset S_X$, atunci

$$T_M(x, \Omega \cup \Theta) = \min\{T_M(x, \Omega), T_M(x, \Theta)\} \tag{38}$$

iar

$$T_{M \cup L}(x, \Omega) = \min\{T_M(x, \Omega), T_L(x, \Omega)\}.$$

(v) Dacă $\operatorname{cone} M$ *este convex, atunci pentru orice $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$, are loc relaţia:*

$$T_M(x_1 + x_2, \Omega_1 + \Omega_2) \leq T_M(x_1, \Omega_1) + T_M(x_2, \Omega_2), \quad \forall\ x_i \in \Omega_i - \operatorname{cone} M,\ i = 1, 2.$$

Propoziţia 47 *Presupunem că fie*

(i) una dintre mulţimile Ω şi M este compactăiar cealaltă închisă;

fie

(ii) X este reflexiv iar Ω şi M sunt slab închise.

Atunci infimumul din definiţia lui T_M este atins:

$$\forall x \in \Omega - \mathrm{cone} M, \exists u \in M : x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega.$$

În mod evident, infimumul este atins în spaţii finit dimensionale ori de câte ori M şi Ω sunt închise. Propoziţia 47 acoperă Propoziţia 2.3 din [50].

În general, dacă renunţăm la condiţia de compacitate în Propoziţia 47 (i), infimumul este posibil să nu fie atins, în spaţii infinit dimensionale.

În rezultatul următor este evidenţiată structura mulţimilor de nivel ale funcţiei timp minimal.

Propoziţia 48 *Fie M şi Ω submulţimi arbitrare ale lui S_X şi, respectiv, X, şi fie $\lambda > 0$. Atunci*

(i) $[T_M(\cdot, \Omega) < \lambda] = \Omega - [0, \lambda) \cdot M$.

(ii) $\Omega - [0, \lambda] \cdot M \subset [T_M(\cdot, \Omega) \leq \lambda] \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} (\Omega - [0, \lambda + \varepsilon) \cdot M)$.

(iii) Dacă una dintre mulţimile Ω şi M este compactă iar cealaltă închisă atunci

$$[T_M(\cdot, \Omega) \leq \lambda] = \Omega - [0, \lambda] \cdot M,$$

şi, în particular, T_M este inferior semicontinuă.

Propoziţia 49 *Fie $x \in \mathrm{dom}\, T_M \setminus \Omega$ aşa încât există $u \in M$, $x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega$. Atunci $x + T_M(x, \Omega)u \in \mathrm{bd}\, \Omega$.*

Convexitate

Prezentăm n continuare câteva proprietăţi ale funcţiei timp minimal $T_M(\cdot, \Omega)$ legate de convexitate.

Propoziţia 50 *Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) Dacă Ω şi $\mathrm{cone}\, M$ sunt mulţimi convexe atunci $T_M(\cdot, \Omega)$ este o funcţie convexă.

(ii) Dacă Ω este mulţime închisă iar $T_M(\cdot, \Omega)$ este o funcţie convexă atunci Ω este mulţime convexă. Dacă, în plus, Ω este mărginită iar M este închisă, atunci $\mathrm{cone}\, M$ este convex.

Remark 51 *Folosind Propoziţa 49, se poate observa că pentru orice $x \in \mathrm{dom}\, T_M \setminus \Omega$, proiecţia lui x pe Ω,*

$$\Pi_M(x, \Omega) := \{\omega \in \Omega \mid \exists u \in M : x + T_M(x, \Omega)u = \omega\}$$

este conţinută în $\mathrm{bd}\, \Omega$.

Pe spaţii Hilbert, în ipoteze de convexitate obţinem faptul că $\Pi_M(x, \Omega)$ este o mulţime nevidă.

Propoziţia 52 *Presupunem că X este un spaţiu Hilbert, Ω şi M sunt închise şi Ω şi $\mathrm{cone}\, M$ sunt convexe. Atunci pentru orice $x \in \Omega - \mathrm{cone}\, M$, $T_M(x, \Omega)$ este atins.*

Considerăm acum proiecţia pe M a unui element $x \in \Omega - \mathrm{cone}\, M$:

$$S_M(x, \Omega) := \{u \in M \mid x + T_M(x, \Omega)u \in \Omega\} \subset M.$$

În condiţii de strictă convexitate am evidenţiat unele legături între $\Pi_M(x, \Omega)$ şi $S_M(x, \Omega)$.

Propoziţia 53 *Presupunem că X este un spaţiu normat strict convex, şi $M \subset S_X$ astfel încât $\mathrm{cone}\, M$ este convex. Dacă există $x \in \mathrm{dom}\, T_M \setminus \mathrm{cl}\, \Omega$ astfel încât mulţimea $S_M(x, \Omega)$ are cel puţin două elemnte diferite atunci Ω nu este convexă.*

Remark 54 *Dacă $\mathrm{cone}\, M$ nu este convex, atunci mulţimea $S_M(x, \Omega)$ poate avea mai mult de un element chiar şi în spaţii strict convexe, cu Ω mulţime convexă.*

Propoziţia 55 *Dacă Ω este strict convexă iar $M \subset S_X$ este astfel încât $\mathrm{cone}\, M$ este convex, atunci $S_M(x, \Omega)$ este cel mult un singleton, pentru orice $x \in \mathrm{dom}\, T_M \setminus \mathrm{cl}\, \Omega$.*

În situaţiile descrise în Propoziţiile 53 şi 55 obţinem drept consecinţă imediată că proiecţia pe Ω, $\Pi_M(x,\Omega)$ are cel mult un element. Mai mult, dacă X este un spaţiu Hilbert, Ω şi M sunt închise şi Ω este strict convexă iar $\operatorname{cone} M$ este convex, în virtutea Propoziţiilor 55 şi 52, obţinem că $\Pi_M(x,\Omega)$ este un singleton. În literatură sunt câteva lucrări care se ocupă de acest aspect (i.e., mulţimea $\Pi_M(x,\Omega)$ este un singleton), în cazul în care M este o vecinătate convexă şi închisă a originii ([12], [49], [11], [33]). În cazul nostru M nu este nici convexă nici o vecinătate a originii.

Proprietatea Lipschitz

Prezentăm în continuare aspecte legate de proprietatea Lipschitz a funcţiei timp minial direcţional, T_M.

Propoziţia 56 *Dacă* $\operatorname{cone} M$ *este convex şi ori* $\operatorname{cone} M \cap \operatorname{int} \Omega_\infty \neq \emptyset$, *ori* $\operatorname{int}(\operatorname{cone} M) \cap \Omega_\infty \neq \emptyset$ *atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este global Lipschitz.*

Există situaţii când funcţia $T_M(\cdot,\Omega)$ este global Lipschitz dar $\operatorname{cone} M$ nu este convex. Continuăm cu cazul local.

Propoziţia 57 *Dacă multifuncţia proiecţie*

$$\Pi_M(\cdot,\Omega) : \operatorname{dom} T_M \rightrightarrows \Omega, \quad \Pi_M(x,\Omega) = \{\tilde{x} \in \Omega \mid \exists u \in M : x + T_M(x,\Omega)u = \tilde{x}\}$$

este Lipschitz în jurul punctului $\overline{x} \in \operatorname{dom} T_M$ *(ca multifuncţie), atunci*T_M *este de asemenea Lipschitz în jurul acestui punct (ca funcţie).*

Propoziţia 58 *Presupunem că avem* $\operatorname{cone} M$ *convex şi că există* $\overline{x} \in \Omega$ *astfel încât* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este atins în orice punct din* $B(\overline{x},\eta)$, $\eta > 0$. *Atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este Lipschitz în jurul lui* $\overline{x}$ *dacă şi numai dacă există* $\ell \geq 0$ *şi* $\delta > 0$ *astfel încât*

$$T_M(x+u,\Omega) \leq \ell\|u\|, \quad \forall u \in D(0,\delta),\ \forall x \in \Omega \cap B(\overline{x},\delta).$$

Analizăm în continuare situaţia în care punctul de referinţă nu aparţine lui Ω.

Propoziţia 59 *Fie* $\overline{x} \in X$ *astel încât* $T_M(\overline{x},\Omega)$ *este atins, adicăexistă* $\overline{v} \in M$ *astfel încât* $\widetilde{x} := \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)\overline{v} \in \Omega$, *şi presupunem că* Ω *este mulţime închisă iar* $\operatorname{cone} M$ *este convex. Dacă* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este local Lipschitz în jurul lui* $\widetilde{x}$ *de constantă Lipschitz* $\ell \geq 0$, *atunci pentru orice* x *într-o vecinătate a lui* $\overline{x}$, *are loc relaţia*

$$T_M(x,\Omega) \leq T_M(\overline{x},\Omega) + \ell \, \|x - \overline{x}\| \,. \tag{39}$$

Lemma 60 *Presupunem că* Ω *este mulţime închisă,* $\operatorname{cone} M$ *este convex, şi* $\overline{x} \in X \backslash \Omega$ *are proprietatea că există* $\overline{v} \in \operatorname{int} \operatorname{cone} M$ *astfel încât* $\widetilde{x} := \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)\overline{v} \in \Omega$. *Atunci pentru orice* x *într-o vecinătate a lui* $\overline{x}$, *(39) are loc cu* $\ell := 1$.

Propoziţia 61 *Presupunem că una din mulţimile* M *şi* Ω *este compactă iar cealaltă închisă,* $\operatorname{cone} M$ *este convex şi* $\overline{x} \in X \backslash \Omega$ *are proprietatea că există* $\delta, \gamma > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in B(\overline{x},\gamma)$, $T_M(x,\Omega)$ *este atins pe o direcţie* $v_x \in M$ *astfel încât* $B(v_x,\delta) \subset \operatorname{cone} M$. *Atunci* $T_M(\cdot,\Omega)$ *este local Lipschitz în jurul lui* $\overline{x}$ *cu modulul Lipschitz egal cu* 1.

Cazul $M := \{u\}$ a fost analizat în Propoziţia 4.1, Lemma 4.3 şi Corollary 4.6 din [50]. În cazul abordat de noi apar o serie de noi dificultăţi, după cum se poate uşor observa comparând rezultatele.

Calcul subdiferenţial şi aplicaţii

Dăm în continuare formule pentru subdiferenţiala Fréchet a lui $T_M(\cdot,\Omega)$.

Propoziţia 62 *Fie* X *un spaţiu liniar normat,* $M \subset S_X$ *şi* $\Omega \subset X$.

(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, *atunci*

$$\widehat{\partial} T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, -u\rangle \leq 1,\ \forall u \in M\} \cap \widehat{N}(\Omega,\overline{x}).$$

(ii) Presupunem că ne aflăm într-una din situaţiile descrise în Propoziţiile 47 şi 52 (i.e., $\Pi_M(x,\Omega) \neq \emptyset$, $\forall x \in \operatorname{dom} T_M(\cdot,\Omega)$*). Fie* $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$. *Atunci pentru orice* $u \in M$ *şi* $\omega \in \Omega$ *cu* $\overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)u = \omega$, *are loc relaţia*

$$\widehat{\partial} T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, u\rangle = -1\} \cap \widehat{N}(\Omega,\omega).$$

De remarcat că rezultatul anterior nu este acoperit de cele deja existente pe această temă. De exemplu, în [37, Teoremele 4.1, 4.2], mulţimea direcţiilor, M, este convexă, iar în cazul nostru acest lucru nu se cere. De asemenea, formula subdiferenţialei Fréchet pentru punctele dinafara lui Ω este diferită faţă de [37, Teorema 4.2], în sensul că noi folosim conul normal la Ω în punctele de proiecţie în loc de conul normal la mulţimile de nivel ale funcţiei timp minimal direcţional T_M.

Propoziţia 63 *Fie X un spaţiu Asplund, $M \subset S_X$ şi $\Omega \subset X$. Presupuenem că M este compactă iar Ω închisă.*
(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, atunci

$$\partial T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \exists u \in M : \langle x^*, -u\rangle \leq 1\} \cap N(\Omega,\overline{x}).$$

(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$, atunci pentru orice $x^* \in \partial T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x})$, există $u \in S_M(x,\Omega)$ astfel încât

$$\langle x^*, u\rangle = -1$$

şi

$$x^* \in N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)u).$$

(iii) Dacă $\overline{x} \in \Omega$, atunci

$$\partial^\infty T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x}) \subset \{x^* \in X^* \mid \exists u \in M : \langle x^*, u\rangle \geq 0\} \cap N(\Omega,\overline{x}).$$

(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$, atunci pentru orice $x^* \in \partial^\infty T_M(\cdot,\Omega)(\overline{x})$, există $u \in S_M(x,\Omega)$ astfel încât

$$\langle x^*, u\rangle = 0$$

şi

$$x^* \in N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)u).$$

Corolarul 64 *Fie X un spaţiu normat finit dimensional, $M \subset S_X$ şi $\Omega \subset X$. Presupunem că M şi Ω sunt mulţimi închise.*
(i) Dacă $\overline{x} \in \Omega$ şi entru orice $u \in M$, $\{u\}^+ \cap N(\Omega,\overline{x}) = \{0\}$, atunci $T_M(\cdot,\Omega)$ este Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$.
(ii) Dacă $\overline{x} \in (\Omega - \operatorname{cone} M) \setminus \Omega$ şi pentru orice $u \in S_M(x,\Omega)$, $\{u\}^\perp \cap N(\Omega, \overline{x} + T_M(\overline{x},\Omega)u) = \{0\}$, atunci $T_M(\cdot,\Omega)$ este Lipschitz în jurul lui $\overline{x}$.

În final, lucrarea conţine o aplicaţie a funcţiei timp minimal direcţional la o problemă Fermat-Torricelli generalizată.

În lucrarea [29] am definit noi derivate de tip Studniarski şi am obţinut reguli de calcul pentru acestea, pentru ca în final să obţinem condiţii de optimalitate pentru optimizarea vectorială. Fie multifuncţia $F : X \rightrightarrows Y$, $(x_0, y_0) \in \operatorname{Gr} F$, $u \in X$ şi $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Atunci:
(i) Derivata de tip Studniarski de ordin m a lui F în (x_0, y_0) este multifuncţia $d^{(m)}F(x_0,y_0) : X \rightrightarrows Y$ dată prin

$$d^{(m)}F(x_0,y_0)(u) := \{v \in Y \mid \exists (t_n) \downarrow 0, \exists (u_n, v_n) \to (u,v), \forall n \in \mathbb{N},\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

(ii) Derivata strictă de tip Studniarski de ordin m a lui F în (x_0, y_0) este multifuncţia $d_s^{(m)}F(x_0,y_0) : X \rightrightarrows Y$ dată prin

$$d_s^{(m)}F(x_0,y_0)(u) := \{v \in Y \mid \forall (t_n) \downarrow 0, \exists (u_n, v_n) \to (u,v), \forall n \in \mathbb{N},\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

(iii) Derivata inferioră de tip Studniarski de ordin m a lui F în (x_0, y_0) este multifuncţia $d_l^{(m)}F(x_0,y_0) : X \rightrightarrows Y$ dată prin

$$d_l^{(m)}F(x_0,y_0)(u) := \{v \in Y \mid \forall (t_n) \downarrow 0, \forall (u_n) \to u, \exists (v_n) \to v, \forall n \in \mathbb{N},\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

Se observă faptul că atunci când ordinul este 1, fiecare derivată coincide cu derivata corespunzătoare pentru care s-a facut generalizarea, respectiv cu derivatele Bouligand, Ursescu sau Dini. În plus, pentru orice $u \in X$ are loc următoare incluziune:

$$d_l^{(m)}F(x_0,y_0)(u) \subset d_s^{(m)}F(x_0,y_0)(u) \subset d^{(m)}F(x_0,y_0)(u),$$

unde $(x_0,y_0)\in \operatorname{Gr} F$. Având în vedere că incluziunea inversă nu are loc în cazul derivatelor Bouligand, Ursescu şi Dini, nici în această situaţie ea nu are loc, pentru aceasta fiind suficient să luăm $m=1$. Menţionăm că pentru $m>1$, de asemenea, incluziunea inversă nu are loc. Astfel, utilizând terminologia din [53], definim următoarele noţiuni: spunem că F este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 dacă

$$d_s^{(m)} F\left(x_0,y_0\right)=d^{(m)} F\left(x_0,y_0\right).$$

Similar, spunem că F este semi-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 dacă

$$d_l^{(m)} F\left(x_0,y_0\right)=d^{(m)} F\left(x_0,y_0\right).$$

Se observă imediat că semi-diferenţiabilitatea implică proto-diferenţiabilitatea. Cu toate acestea implicaţia inversă nu are loc. În următorul rezultat regăsim condiţii suficiente pentru ca aceste noţiuni să coincidă.

Propoziţia 65 *Fie $F: X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie, $(x_0,y_0)\in \operatorname{Gr} F$, $u\in X$ şi fie $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Dacă F are proprietatea Aubin în jurul punctului $(x_0,y_0)\in\operatorname{Gr} F$, atunci*

$$d_l^{(m)} F\left(x_0,y_0\right)(u)=d_s^{(m)} F\left(x_0,y_0\right)(u).$$

Mai mult, dacă F este şi proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0, atunci F este semi-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0.

Fie multifuncţia $F: X\rightrightarrows Y$, $S\subset X$ o mulţime nevidă şi $K\subset Y$ un con convex închis ascuţit (i.e., $K\cap -K=\{0\}$). Considerăm următoarea problemă de optimizare

$$(P_S) \quad \min\ F(x),\ x\in S.$$

Obiectivul nostru principal a fost acela de a obţine condiţii de optimalitate referitoare la derivatele de ordin superior introduse mai sus, pentru o noţiune slabă de minim sharp pentru problema (P_S). În plus, am avut în vedere faptul ca multifuncţia obiectiv a problemei de optimizare să fie dată ca o sumă, respectiv o compunere de două multifuncţii. Din acest motiv am avut nevoie să obţinem reguli de calcul pentru derivatele de tip Studniarski definite mai sus.

Teorema 66 *Fie $F,G: X\rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafice închise, $f: X\to X$ o funcţie de clasă C^1, $(x_0,y_0)\in \operatorname{Gr} F$, $(x_0,y_1)\in\operatorname{Gr}(G\circ f)$ şi $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Presupunem că funcţia $g:(X\times Y)^2\to X$ dată prin $g(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=f(\alpha)-\gamma$ este metric subregulată în $(x_0,y_0,f(x_0),y_1,0_X)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F\times\operatorname{Gr} G$. Dacă F este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 sau dacă G este proto-diferenţiabilă de ordin m în $f(x_0)$ relativ la y_1, atunci, pentru orice $u\in X$,*

$$d^{(m)} F\left(x_0,y_0\right)(u)+d^{(m)} G\left(f\left(x_0\right),y_1\right)\left(\nabla f\left(x_0\right)(u)\right)\subset d^{(m)}\left(F+G\circ f\right)\left(x_0,y_0+y_1\right)(u).$$

Se arată imediat că, dacă în teorema precedentă f este funcţia identitate şi F este semi-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 sau G is este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_1, atunci are loc concluzia fară ipoteza de subregularitate metrică. Totuşi, natura ipotezelor de semi-diferenţiabilitate şi metric subregularitate este diferită.

Fie multifuncţiile $F,G: X\rightrightarrows Y$. Notăm cu (F,G) multifuncţia $(F,G): X\rightrightarrows Y\times Y$ dată prin $(F,G)(x):=F(x)\times G(x)$ pentru orice $x\in X$.

Teorema 67 *Fie $F,G: X\rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafice închise, $(x_0,y_0)\in\operatorname{Gr} F$, $(x_0,y_1)\in\operatorname{Gr} G$ şi $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Presupunem că funcţia $g:(X\times Y)^2\to X$ dată prin $g(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\alpha-\gamma$ este metric subregulată în $(x_0,y_0,x_0,y_1,0_X)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F\times\operatorname{Gr} G$. Dacă F este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 sau dacă G este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_1, atunci, pentru orice $u\in X$,*

$$\left(d^{(m)} F\left(x_0,y_0\right), d^{(m)} G\left(x_0,y_1\right)\right)(u)\subset d^{(m)}\left((F,G)\right)\left(x_0,y_0,y_1\right)(u).$$

Teorema 68 *Fie $F: X\rightrightarrows Z$, $G: Z\rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafice închise astfel încât $(x_0,z_0)\in\operatorname{Gr} F$, $(z_0,y_0)\in\operatorname{Gr} G$ şi $\operatorname{Im} F\subset\operatorname{dom} G$. Presupunem că funcţia $g: X\times Z\times Z\times Y\to Z$ dată prin $g(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\beta-\gamma$ este metric subregulată în $(x_0,z_0,z_0,y_0,0_Z)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F\times\operatorname{Gr} G$. Dacă F este proto-diferenţiabilă în x_0 relativ la z_0 sau dacă G este proto-diferenţiabilă în z_0 relativ la y_0, atunci, pentru orice $u\in X$,*

$$d^{(1)} G\left(z_0,y_0\right)\left(d^{(1)} F\left(x_0,z_0\right)(u)\right)\subset d^{(1)}\left(H\circ F\right)\left(x_0,y_0\right)(u). \tag{40}$$

Pentru a atinge obiectivul propus, şi anume, obţinerea unor condiţii necesare de optimalitate pentru probleme de minimizare a sumei, respectiv a compunerii dintre două multifuncţii, vom utiliza incluziunile obţinute sub ipoteze de subregularitate metrică. Condiţiile de optimalitate astfel obţinute sunt pentru noţiunea sharp despre care am menţionat mai sus şi care a fost investigată în diferite versiuni în [19] şi [30].

Fie $\varepsilon > 0$ şi $\psi : (-\varepsilon, +\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie crescătoare pe $[0, +\infty)$ cu proprietatea că $\psi(t) = 0$ dacă şi numai dacă $t = 0$. Spunem că punctul $(x_0, y_0) \in \operatorname{Gr} F \cap (S \times Y)$ este minim slab ψ-sharp local Pareto pentru problema (P_S) dacă există $\alpha > 0$ şi o vecinătate U a lui x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap S$, $y \in F(x)$ are loc următoarea inegalitate

$$\Delta(y - y_0, -K) \geq \alpha\psi(d(x, W)),$$

unde $\Delta : Y \to \mathbb{R}$ reprezintă funcţia distanţă orientată, iar $W := \{x \in S \mid y_0 \in F(x)\}$ mulţimea de puncte argmin.

Considerăm următoarea problemă de optimizare

$$\left(P_S^1\right) \ \min \ (F + G)(x), \ x \in S,$$

unde F, $G : X \rightrightarrows Y$, $S \subset X$.

În următoarele două rezultate sunt obţinute condiţiile necesare pentru un punct de minim slab ψ-sharp local Pareto pentru problemele (P_S), respectiv $\left(P_S^1\right)$, condiţii ce sunt în termeni de derivate de ordin superior.

Lemma 69 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie astfel încât $(x_0, y_0) \in \operatorname{Gr} F$ este minim slab ψ-sharp local Pareto pentru problema (P_S). Dacă $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, atunci, pentru orice $u \in T_{DM}(S, x_0)$ şi orice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, are loc*

$$d^{(m)}F(x_0, y_0)(u) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset, \tag{41}$$

unde $T_{DM}(S, x_0)$ reprezintă conul tangent Dubovitskij-Miljutin la S în x_0.

Dacă în lema 69, considerăm $W = \{x_0\}$ şi $\psi(t) = t^m$, atunci obţinem un rezultat similar cu [41, Theorem 2.1], fără ipoteze suplimentare asupra multifuncţiei F. Totuşi, relaţia (41) are loc în problemele de optimizare cu restricţii pentru orice $u \in T_{DM}(S, x_0)$, în timp ce în Teorema 2.1 din [41], relaţia corespunzătoare are loc pentru orice u din conul tangent Ursescu la S în x_0. În schimb, rezultatul precedent are loc pentru orice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, nu doar pentru un $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixat, iar condiţiile necesare de optimalitate obţinute sunt pentru o noţiune generală sharp de eficienţă pentru multifuncţii.

Teeorema 70 *Fie F, $G : X \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafice închise astfel încât $(x_0, y_0) \in \operatorname{Gr} F$, $(x_0, y_1) \in \operatorname{Gr} G$, şi fie $(x_0, y_0 + y_1)$ un punct de minim slab ψ-sharp local Pareto pentru problema $\left(P_S^1\right)$. Presupunem că funcţia $g : (X \times Y)^2 \to X$ dată prin $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \alpha - \gamma$ este metric subregulată în $(x_0, y_0, x_0, y_1, 0_X)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F \times \operatorname{Gr} G$ şi $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dacă F este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_0 sau dacă G este proto-diferenţiabilă de ordin m în x_0 relativ la y_1, atunci, pentru orice $u \in T_{DM}(S, x_0)$, şi orice $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,*

$$\left[d^{(m)}F(x_0, y_0)(u) + d^{(m)}G(x_0, y_1)(u)\right] \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

Considerăm multifuncţiile $F : X \rightrightarrows Z$, $G : Z \rightrightarrows Y$ cu $\operatorname{Im} F \subset \operatorname{dom} G$, mulţimea $S \subset X$ şi următoarea problemă de optimizare

$$\left(P_S^2\right) \ \min \ (G \circ F)(x), \ x \in S.$$

Teeorema 71 *Fie $F : X \rightrightarrows Z$, $G : Z \rightrightarrows Y$ multifuncţii cu grafice închise astfel încât $(x_0, z_0) \in \operatorname{Gr} F$, $(z_0, y_0) \in \operatorname{Gr} G$ şi $\operatorname{Im} F \subset \operatorname{dom} G$ şi fie (x_0, y_0) un punct de minim slab ψ-sharp local Pareto pentru problema $\left(P_S^2\right)$. Presupunem că funcţia $g : X \times Z \times Z \times Y \to Z$ dată prin $g(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \beta - \gamma$ este metric subregulată în $(x_0, z_0, z_0, y_0, 0_Z)$ în raport cu $\operatorname{Gr} F \times \operatorname{Gr} G$ şi $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Dacă F este proto-diferenţiabilă în x_0 relativ la z_0 sau dacă G este proto-diferenţiabilă în z_0 relativ la y_0, atunci, pentru orice $u \in T_{DM}(S, x_0)$,*

$$d^{(1)}G(z_0, y_0)\left(d^{(1)}F(x_0, z_0)(u)\right) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

Funcţiile convexe de ordinul al doilea au fost introduse de Mond în lucrarea [47], pentru a studia dualitatea de ordinul al doilea. De atunci, această noţiune a fost generalizată de mai multe ori, folosind din ce în ce mai mulţi parametri şi cuantificatori. În lucrarea [66], care poate fi văzută ca o continuare a lucrării [61], arătăm că toate aceste noţiuni au o caracterizare intrinsecă destul de simplă.

În lucrările dedicate Mecanicii Statistice şi Fizicii Statistice, pentru a analiza distribuţia particulelor în gaze ideale, se foloseşte metoda multiplicatorilor Lagrange într-un mod formal. În lucrarea [67] tratăm riguros această problemă pentru entropiile de tip Bose-Einstein, Fermi-Dirac şi Maxwell-Boltzmann şi prezentăm un studiu complet în cazul entropiei Maxwell-Boltzmann. Abordarea noastră se bazează pe rezultate recente asupra seriilor de funcţii convexe obţinute în lucrarea [58].

Bibliografie

[1] S. Adly, A.L. Dontchev, M. Théra, *On one-sided Lipschitz stability of set-valued contractions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 35 (2014), 837–850.

[2] M. Apetrii, M. Durea, R. Strugariu, *On subregularity properties of set-valued mappings,* Set-Valued and Variational Analysis, 21 (2013), 93–126.

[3] M. Apetrii, M. Durea, R. Strugariu, *A new penalization tool in scalar and vector optimizations*, Nonlinear Analysis, 107 (2014), 22–33.

[4] F.J. Aragon Artacho, B.S. Mordukhovich, *Metric regularity and Lipscithian stability of parametric variational systems*, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 1149–1170.

[5] A.V. Arutyunov, *Covering mapping in metric spaces, and fixed points*, Doklady Mathematics, 76 (2007), 665–668.

[6] A.V. Arutyunov, *Stability of coincidence points and properties of covering mappings,* Mathematical Notes, 86 (2009), 153–158.

[7] A.V. Arutyunov, S.E. Zhukovskiy, *Perturbation of solutions of the coincidence point problem for two mappings*, Doklady Mathematics, 89 (2014), 346–348.

[8] J. P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued Analysis*, Birkäuser, Basel, 1990.

[9] J.M. Borwein, *Continuity and differentiability properties of convex operators*, Proc Lond Math Soc, 44(3) (1982), 420–444.

[10] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Wiley, New York, 1983.

[11] G. Colombo, V. Goncharov, B. Mordukhovich, *Well-posedness of minimal time problems with constant dynamics in Banach spaces*, Set-Valued and Variational Analysis, 18 (2010), 349–372.

[12] G. Colombo, P.R. Wolenski, *Variational analysis for a class of minimal time functions in Hilbert spaces*, Journal of Convex Analysis, 11 (2004), 335–361.

[13] E. De Giorgi, A. Marino, M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza*, Atti. Accad. Naz. Lincei rend. Cl. Sci. fis. Mat. Natur., 68 (1980), 180–187.

[14] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points*, Proceedings of the American Mathematical Society, 139 (2011), 521–534.

[15] A.L. Dontchev, H. Frankowska, *Lyusternik-Graves theorem and fixed points II*, Journal of Convex Analysis, 19 (2012), 955–973.

[16] W.-S. Du, *The extension of continuity and generalized results for set-valued maps in convex analysis*, Nonlinear Analysis, 71 (2009), 3176–3184.

[17] M. Durea, H. T. Nguyen, R. Strugariu, *Metric regularity of epigraphical multivalued mappings and applications to vector optimization*, Mathematical Programming, Serie B, 139 (2013), 139–159.

[18] M. Durea, M. Panţiruc, R. Strugariu, *Minimal time function with respect to a set of directions. Basic properties and applications*, Optimization Methods and Software, 31 (2016), 535-561.

[19] M. Durea, R. Strugariu, *Necessary optimality conditions for weak sharp minima in set-valued optimization,* Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 73 (2010), 2148–2157.

[20] M. Durea, R. Strugariu, *On some Fermat rules for set-valued optimization problems*, Optimization, 60 (2011), 575–591.

[21] M. Durea, R. Strugariu, *Openness stability and implicit multifunction theorems: Applications to variational systems*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75 (2012), 1246–1259.

[22] M. Durea, R. Strugariu, *On parametric vector optimization via metric regularity of constraint systems*, Mathematical Methods of Operations Research, 74 (2011), 409–425.

[23] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in general Banach spaces*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), 899–913.

[24] M. Durea, R. Strugariu, *Calculus of tangent sets and derivatives of set-valued maps under metric subregularity conditions*, Journal of Global Optimization, 56 (2013), 587–603.

[25] M. Durea, R. Strugariu, *Chain rules for linear openness in metric spaces and applications*, Mathematical Programming Serie A, 143 (2014), 147–176.

[26] M. Durea, R. Strugariu, *Metric subregularity of composition set-valued mappings with applications to fixed point theory*, Set-Valued and Variational Analysis, 24 (2016), 231-251.

[27] M. Durea, R. Strugariu, Chr. Tammer, *Scalarization in geometric and functional vector optimization revisited*, Journal of Optimization Theory and Applications, 159 (2013), 635-655.

[28] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar, *Implicit functions and solution mappings*, Springer, Berlin, 2009.

[29] E.A. Florea, *Studniarski-type derivative calculus and optimality conditions in vector optimization*, trimisă spre publicare.

[30] F. Flores-Bazán, B. Jiménez, *Strict effciency in set-valued optimization*, SIAM Journal on Control and Optimization, 48 (2009), 881–908.

[31] X.L. Guo, S.J. Li, K.L. Teo, *Subdifferential and optimality conditions for the difference of set-valued mappings*, Positivity 16 (2012), 321–337.

[32] A. Hamel, *Remarks to an equivalent formulation of Ekeland's variational principle*, Optimization 31 (1994), 233–238.

[33] V. Goncharov, F. Pereira, *Neighbourhood retractions of nonconvex sets in a Hilbert space via sublinear functionals*, Journal of Convex Analysis, 18 (2011), 1–36.

[34] X.H. Gong, *Optimality conditions for Henig and globally proper efficient solutions with ordering cone has empty interior*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 307 (2005), 12–31.

[35] A.D. Ioffe, *Towards variational analysis in metric spaces: metric regularity and fixed points*, Mathematical Programming, Serie B, 123 (2010), 241–252.

[36] A.D. Ioffe, *Regularity on a fixed set*, SIAM Journal on Optimization, 21 (2011), 1345–1370.

[37] Y. Jiang, Y. He, *Subdifferentials of a minimal time function in normed spaces*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 358 (2009), 410–418.

[38] A. A. Khan, Chr. Tammer, C. Zalinescu, *Set-valued Optimization - An Introduction with Applications*, Springer, Berlin, 2015.

[39] S.J. Li, X.L. Guo, *Weak subdifferential for set-valued mappings and its applications*, Nonlinear Anal. 71 (2009) 5781–5789.

[40] S.J. Li, C. M. Liao, *Second-order differentiability of generalized perturbation maps*, Journal of Global Optimization, 52 (2012), 243–252.

[41] S.J. Li, X. Sun, Y. Cheng, P. Zhao, *Higher-order optimality conditions for set-valued optimization via Studniarski derivatives*, Advances in Mathematics, 40 (2011), 433–440.

[42] S. J. Li, K. W. Meng, J.-P. Penot, *Calculus rules for derivatives of multimaps*, Set-Valued Analysis, 17 (2009), 21–39.

[43] T.-C. Lim, *On fixed-point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 110 (1985), 436–441.

[44] L.J. Lin, C.S. Chuang, *Existence theorems for variational inclusion problems and the set-valued vector Ekeland variational principle in a complete metric space*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 2665–2672.

[45] C. G. Liu, K. F. Ng, *Ekeland's variational principle for set-valued functions*, SIAM J. Optim. 21 (2011), 41–56.

[46] N.B. Minh, N.X. Tan, *On the C-approximations of multivalued mappings,* Vietnam J Math, 30(4) (2002), 343–363.

[47] B. Mond, *Second order duality for nonlinear programs*, Opsearch, 11 (1974), 90–99.

[48] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Vol. I: Basic Theory, Vol. II: Applications, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 330 and 331, Berlin, 2006.

[49] B.S. Mordukhovich, N.M. Nam, *Limiting subgradients of minimal time functions in Banach spaces*, Journal of Global Optimization, 46 (2010), 615–633.

[50] N. M. Nam, C. Zălinescu, *Variational analysis of directional minimal time functions and applications to location problems*, Set-Valued and Variational Analysis, 21 (2013), 405–430.

[51] Qiu, J.H.: Set-valued quasi-metrics and a general Ekeland's variational principle in vector optimization, SIAM J. Control Optim. 51 (2013), no. 2, 1350–1371.

[52] S.M. Robinson, *Strongly regular generalized equations*, Mathematics of Operations Research, 5 (1980), 43–62.

[53] R. T. Rockafellar, *Proto-differentiability of set-valued mappings and its applications in optimization*, Ann. Inst. H. Poincaré, 6 (1989), 449–482.

[54] W. Takahashi, *Existence theorems generalizing fixed point theorems for multivalued mappings*, in "Fixed point theory and applications (Marseille, 1989)", 397–406, Pitman Res. Notes Math. Ser., 252, 1991.

[55] Chr. Tammer, C. Zălinescu, *Vector variational principles for set-valued functions*, Optimization 60 (2011), 839–857.

[56] T.N. Tasset, *Lagrange multipliers for set-valued functions when ordering cones have empty interior*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI (2010), thesis (Ph.D.)–University of Colorado at Boulder.

[57] Vu Anh Tuan, Chr. Tammer, C. Zălinescu, *The Lipschitzianity of convex vector and set-valued functions*, TOP, 24 (2016), 273–299.

[58] C. Vallee, C. Zălinescu, *Series of convex functions: subdifferential, conjugate and applications to entropy minimization*, Journal of Convex Analysis, va apărea.

[59] M. Volle, J.-B. Hiriart-Urruty, C. Zălinescu, *When some variational properties force convexity*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 19 (2013), 701–709.

[60] J. J. Ye, *The exact penalty principle*, Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications, 75 (2012), 1642–1654.

[61] C. Zălinescu, *On some types of second order convexity*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii Al.I. Cuza Iaşi, Secţia Matematică, 35 (1989), 213–220.

[62] C. Zălinescu, *On some extension theorems for set-valued mappings*, Nonlinear Analysis, 88 (2013), 24–26.

[63] C. Zălinescu, *On the use of the quasi-relative interior in optimization*, Optimization, 64 (2015), 1795-1823.

[64] C. Zălinescu, *On the use of semi-closed sets and functions in convex analysis*, Open Mathematics, 13 (2015), 1–5, DOI 10.1515/math-2015-0001.

[65] C. Zălinescu, *On three open problems related to quasi relative interior*, Journal of Convex Analysis, 22 (2015), 641–645.

[66] C. Zălinescu, *On Second-Order Generalized Convexity*, Journal of Optimization Theory and Applications, 168 (2016), 802–829.

[67] C. Zălinescu, *On the entropy minimization problem in Statistical Mechanics*, trimisă spre publicare.

[68] Z.A. Zhou, X.M. Yang, *Optimality conditions of generalized subconvexlike set-valued optimization problems based on the quasi-relative interior*, J. Optim. Theory Appl, 150 (2011), 327–340.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu