Raport de activitate ştiinţifică a proiectului de cercetare

Analiză variaţională pe conuri şi aplicaţii în optimizarea vectorială

PN-III-P4-PCE-2021-0690, nr. PCE 71/2022

Mai 2022 – Decembrie 2022

Activitatea ştiinţifică din perioada 27.05.2022 (data de început a proiectului) până la 31.12.2022 (data de final a primei etape) s-a concentrat pe obiectivele şi activităţile prevăzute pentru această etapă.

Obiectivul etapei s-a intitulat *Analiză variaţională pe conuri,* iar activităţile avute în vedere în cadrul acestui obiectiv au fost:

1. Proprietăţi algebrice şi topologice pentru conuri – documentare
2. Proprietăţi algebrice şi topologice pentru conuri – rezultate intermediare
3. Conuri de dilatare şi separare conică – documentare

Mai mult, a fost prevăzut ca activitatea de cercetare din această etapă să se concretizeze într-un articol ştiinţific publicat într-o revistă situată în cuartilele Q1 sau Q2.

Atât obiectivul cât şi activităţile avute în vedere au fost complet îndeplinite. În cadrul investigaţiei întreprinse, am obţinut diverse rezultate ce sunt conţinute în următoarele articole ştiinţifice publicate în reviste matematice importante aflate în cuartilele Q1 sau Q2 (ordinea de mai jos ţine cont de legăturile cu obiectivul şi activităţile menţionate):

- **M. Durea**, **E.-A. Florea**, D. Maxim, **R. Strugariu**, *Approximate efficiency in set-valued optimization with variable order*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 6 (2022), 619-640; FI: 1.683 (Q1), SRI: 0.685.
- M. Burlică, **M. Durea**, **R. Strugariu**, *New concepts of directional derivatives for set-valued maps and applications to set optimization*, Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2022.2088368; FI: 1.203 (Q1), SRI: 1.124 (Q2).
- **M. Durea**, **R. Strugariu**, *Directional derivatives and subdifferentials for set-valued maps applied to set optimization*, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-022-01222-3; FI: 0.977 (Q2); SRI: 1.211 (Q2).

În plus, unele rezultate obţinute de asemenea în cadrul acestui proiect şi care nu sunt încă publicate au fost prezentate la conferinţa internaţională *12th International Conference on Parametric Optimization and Related Topics*, (12–16 Septembrie, 2022, Augsburg, Germania) de către **C. Zălinescu** în prezentarea orală intitulată *On an open problem related to the parametric version of Gale's example in conic linear programming.*

Pentru mai multe detalii, a se vedea pagina web a proiectului la adresa

http://www.math.uaic.ro/~zalinesc/VARACAVO_ro.htm

În cele ce urmează, prezentăm pe scurt principalele concepte utilizate şi cele mai importante rezultate obţinute în articolele mai sus menţionate.

Articolul [2] se ocupă, în primul rând, de câteva procedee de dilatare conică ce sunt apoi aplicate pentru studiul unor probleme de separare conică şi pentru a obţine, pe această bază, condiţii de optimalitate pentru eficienţa aproximativă în diverse contexte.

Fie X un spaţiu vectorial normat şi $C \subset X$ un con convex închis. Spunem că C este are bază dacă există o mulţime convexă B astfel încât $0 \notin \operatorname{cl} B$ şi $C = \operatorname{cone} B$ (unde cone notează înfăşurătoarea conică). Dacă B este de asemenea mărginită, spunem că C are bază mărginită şi în acest caz, pentru că C este presupus a fi închis, putem lua mulţimea B ca fiind de asemenea închisă (a se vedea [4, Definition 2.2.14]).

Considerăm şi comparăm patru tipuri de dilatări pentru C. Pentru început, notăm faptul evident că

$$C = \operatorname{cone}(C \cap S_X)$$

(unde S_X este sfera unitate) şi notăm prin S_C mulţimea $C \cap S_X$. Primele trei dilatări sunt definite în cele ce urmează.

Definiţia 1 *Fie $\varepsilon > 0$ şi $C \subset X$ un con convex închis şi punctat. Definim următoarele dilatări ale lui C:*

(i) *primul tip de dilatare este*

$$C^{(1)\varepsilon} = \text{cone}\left(\{x \in S_X \mid d(x, C) \le \varepsilon\}\right);$$

(ii) *al doilea tip de dilatare este*

$$C^{(2)\varepsilon} = \text{cone}\left(\{x \in S_X \mid d(x, S_C) \le \varepsilon\}\right);$$

(iii) *dacă C are bază şi B este o bază, al treilea tip de dilatare este*

$$C^{(3)\varepsilon} = \text{cone}\left(\{x \in X \mid d(x, B) \le \varepsilon\}\right).$$

Pentru a defini al patrulea tip de dilatare este nevoie de rezultatul ajutător de mai jos.

Lema 2 *Fie $C \subset X$ un con închis convex. Atunci*

(i) *C are bază dacă şi numai dacă există $x^* \in X^*$ astfel încât $x^*(x) > 0$ pentru orice $x \in C \setminus \{0\}$. În acest caz, $C \cap \{x \in X \mid x^*(x) = 1\}$ este o bază pentru C;*

(ii) *C are bază mărginită dacă şi numai dacă există $x^* \in X^*$ şi $\alpha > 0$ astfel încât $x^*(x) \ge \alpha \|x\|$ pentru orice $x \in C$. În acest caz, $C \cap \{x \in X \mid x^*(x) = 1\}$ este o bază mărginită pentru C.*

Definiţia 3 *Fie $C \subset X$ un con convex închis cu bază mărginită şi $\varepsilon > 0$. Fie $x^* \in X^*$ funcţionala liniară din Lema 2 (ii) şi $A := \{u \in X \mid x^*(u) = 1\}$. Al patrulea tip de dilatare este:*

$$C^{(4)\varepsilon} = \text{cone}\left(\{x \in A \mid d(x, C \cap A) \le \varepsilon\}\right).$$

Acum analizăm unele legături între aceste tipuri de dilatare şi obţinem câteva incluziuni mutuale, după cum urmează.

Propoziţia 4 *Fie $C \subset X$ un con convex închis şi $\varepsilon > 0$. Atunci*

(i) *$C^{(2)\varepsilon} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(1)\delta} \subset C^{(2)\varepsilon}$;*

(ii) *dacă C are bază mărginită atunci există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(3)\delta} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\eta > 0$ astfel încât $C^{(1)\eta} \subset C^{(3)\varepsilon}$;*

(iii) *dacă C are bază mărginită atunci există $\delta > 0$ astfel încât $C^{(4)\delta} \subset C^{(1)\varepsilon}$ şi există $\eta > 0$ astfel încât $C^{(1)\eta} \subset C^{(4)\varepsilon}$.*

După aceasta, stabilim, pe spaţii infinit dimensionale, câteva rezultate de separare conică în sensul precizat în [6]. Ilustrăm această prezentare printr-unul dintre aceste rezultate.

Propoziţia 5 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi P, Q conuri închise convexe astfel încât $P \cap Q = \{0\}$. Dacă P are bază mărginită cu baza B, atunci există U, o vecinătate slabă a originii astfel încât*

$$\text{cone}(B + U) \cap Q = \{0\}.$$

În particular, există $\varepsilon_i > 0$ astfel încât $P^{(i)\varepsilon_i} \cap Q = \{0\}$, pentru orice $i \in \overline{1,4}$.

Pe acest fundament teoretic, construim apoi analiza stabilităţii a trei tipuri de eficienţă aproximativă în contextul problemelor vectoriale cu ordine variabilă, pentru mulţimi şi de asemenea pentru multifuncţii. Mai precis, obţinem unele rezultate care stabilesc faptul că limita unui şir de puncte minimale pentru perturbări ale unei mulţimi A este punct minimal pentru A şi, similar, limita unui şir de puncte minimale pentru perturbări ale unei multifuncţii F este punct minimal pentru F. Pentru aceasta, utilizăm limitele Painlevé-Kuratowski inferioară şi superioară pentru o multifuncţie F care acţionează între două spaţii liniare normate X şi Y care sunt definite astfel: pentru $\overline{x} \in X$,

$$\begin{aligned}\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} F(x) &= \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{V}(y),\ \exists U \in \mathcal{V}(\overline{x}),\ \forall u \in U,\ F(u) \cap V \ne \emptyset\} \\ &= \{y \in Y \mid \forall x_n \to \overline{x},\ \exists y_n \to y,\ y_n \in F(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\operatorname*{Limsup}_{x \to \overline{x}} F(x) &= \{y \in Y \mid \forall V \in \mathcal{V}(y),\ \forall U \in \mathcal{V}(\overline{x}),\ \exists u \in U,\ F(u) \cap V \ne \emptyset\} \\ &= \{y \in Y \mid \exists x_n \to \overline{x},\ \exists y_n \to y,\ y_n \in F(x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

(Ca de obicei, $\mathcal{V}(x)$ notează sistemul vecinătăţilor lui x.)

Chiar dacă în articolul pe care îl discutăm principalul cadru de lucru este cel al conceptelor de eficienţă în raport cu relaţii de ordine variabilă, studiem de asemenea posibilităţi de a converti eficienţa din ordinea variabilă în eficienţă dată de o ordine fixă. De fapt, unele elemente eficiente pentru o multifuncţie F în raport cu o dilatare a unei multifuncţii de ordine cu valori conuri $K : X \rightrightarrows Y$ devin elemente de eficienţă proprie şi respectiv aproximativă pentru aceeaşi multifuncţie F în raport cu limitele inferioară şi superioară ale lui K.

Propoziţia 6 *Fie* $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{Gr} F$ *astfel încât există* $U \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *şi* $\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice* $x \in U$,

(i) $K^{(1)\varepsilon}(x)$ *este convex şi* $K^{(1)\varepsilon}(x) \cap (-K(x)) = \{0\}$;

(ii) $(F(x) - \overline{y}) \cap \left(-K^{(1)\varepsilon}(x)\right) \subset \{0\}$.

Fie $C = \bigcap_{x \in U} K(x)$. *Presupunem că există* $e \in C \setminus \{0\}$ *şi* $L > 0$ *astfel încât pentru orice* $x, z \in U$,

$$F(x) \subset F(z) - L \|x - z\| e + K(z).$$

Atunci, pentru orice $\delta > 0$, *există* $U_\delta \in \mathcal{V}(\overline{x})$ *astfel încât*

$$(F(U_\delta) - \overline{y} + \delta e) \cap \left(-\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x)\right) = \emptyset.$$

Continuând studiul proprietăţilor conurilor limită obţinem mai multe rezultate, printre care le menţionăm pe următoarele.

Propoziţia 7 *Presupunem că multifuncţia* $K : X \rightrightarrows Y$ *are valori conuri cu baze mărginite, închise punctate într-o vecinătate* U *a lui* $\overline{x}$ *şi notăm prin* B *multifuncţia care asociază fiecărui* $x \in U$ *baza corespunzătoare mărginită şi închisă a lui* $K(x)$. *Dacă* $0 \notin \operatorname{cl} \bigcup_{x \in U} B(x)$ *şi* $\bigcup_{x \in U} B(x)$ *este mărginită, atunci* $D = \operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} B(x)$ *este o bază mărginită pentru* $\operatorname*{Liminf}_{x \to \overline{x}} K(x)$.

Propoziţia 8 *Fie* $K : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie cu valori conuri,* $\overline{x} \in X$ *şi* U *o vecinătate deschisă a lui* $\overline{x}$. *Presupunem că există un con* P *cu interior nevid astfel încât*

$$P \subset \bigcap_{x \in U} K(x).$$

Dacă $P + K(x) \subset K(x)$ *pentru orice* $x \in U$ *(în particular, dacă* K *are valori convexe), atunci multifuncţia* $G : X \rightrightarrows Y$,

$$G(x) = \operatorname*{Liminf}_{u \to x} K(u)$$

este inferior semicontinuă în fiecare punct $x \in U$.

În final, deducem un rezultat de optimalitate pentru probleme de optimizare cu ordine variabilă folosind conversia la o ordine fixă, un rezultat de separare conică, calcul diferenţial generalizat şi unele proprietăţi ale bine-cunoscutei funcţionale Gerstewitz.

În articolele [1] şi [3] introducem mai multe concepte de derivate generalizate pentru multifuncţii care sunt adaptate studiului problemelor de optimizare cu mulţimi, adică probleme pentru care ordinea parţială este guvernată de asemenea de conuri ca în cazul problemelor vectoriale, dar, în loc să lucrăm cu ordinea dintre elemente, ne ocupăm cu relaţii de ordine între mulţimi. Această direcţie de cercetare a fost inaugurată de către Kuroiwa şi colaboratorii săi; a se vedea [9], [5], [8] pentru discuţii şi detalii.

Fie X, Y spaţii liniare normate reale. Considerăm $K \subset Y$ un con convex închis punctat propriu şi fie $A, B \subset Y$ mulţimi nevide. Se definesc (a se vedea [7], de exemplu) relaţiile $\preceq_K^l$ şi $\preceq_K^u$ prin

$$\begin{aligned} A \preceq_K^l B &\iff B \subset A + K \\ A \preceq_K^u B &\iff A \subset B - K. \end{aligned}$$

Atunci când K este solid, adică $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, se definesc de asemenea relaţiile stricte $\prec_K^l$ şi $\prec_K^u$ prin

$$\begin{aligned} A \prec_K^l B &\iff B \subset A + \operatorname{int} K \\ A \prec_K^u B &\iff A \subset B - \operatorname{int} K. \end{aligned}$$

Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie cu valori nevide şi $M \subset X$ o mulţime nevidă închisă. Cea mai uzuală modalitate întâlnită în literatură de a defini conceptul de soluţie a problemei de minimizare a lui F pe M în raport cu relaţiile de ordine de mai sus este descris în continuare.

Definiţia 9 *Un element $\overline{x} \in M$ se numeşte $l-$minim pentru F pe M dacă*

$$x \in M, F(x) \preceq_K^l F(\overline{x}) \Longrightarrow F(\overline{x}) \preceq_K^l F(x).$$

O definiţie similară are loc pentru $\preceq_K^u$. În cazul local, $\overline{x} \in M$ se numeşte $l-$local minim pentru F pe M dacă există o vecinătate U a lui $\overline{x}$ astfel încât

$$x \in M \cap U,\ F(x) \preceq_K^l F(\overline{x}) \Longrightarrow F(\overline{x}) \preceq_K^l F(x).$$

Conceptul de mai sus înseamnă că incluziunea $F(\overline{x}) \subset F(x) + K$ implică faptul că $F(x) \subset F(\overline{x}) + K$, sau, cu alte cuvinte, pentru orice $x \in M$ avem

$$F(\overline{x}) \not\subset F(x) + K \text{ sau } F(\overline{x}) \subset F(x) + K \subset F(\overline{x}) + K.$$

Definiţia 10 *Un element $\overline{x} \in M$ se numeşte $l-$slab minim pentru F pe M dacă*

$$x \in M,\ F(x) \prec_K^l F(\overline{x}) \Longrightarrow F(\overline{x}) \prec_K^l F(x).$$

O definiţie similară are loc pentru $\prec_K^u$. Definiţiile din cadrul local sunt evidente.

Considerăm următoarele noţiuni ale căror legături cu conceptele de eficienţă tocmai definite vor deveni clare ceva mai jos.

Definiţia 11 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $\overline{x}, u \in X$. Se numeşte derivata direcţională superioară a lui F în $\overline{x}$ în direcţia u mulţimea, notată $D^+F(\overline{x})(u)$, a elementelor $v \in Y$ astfel încât pentru orice $(t_n) \downarrow 0$ şi $(u_n) \to u$*

$$\lim_n \frac{e(F(\overline{x}) + t_n v, F(\overline{x} + t_n u_n))}{t_n} = 0. \tag{1}$$

(Aici $e(A, B)$ desemnează excesul de la mulţimea A la mulţimea B.)

Observaţia 12 *Observăm că $D^+F(\overline{x})(u)$ este o mulţime închisă iar relaţia $v \in D^+F(\overline{x})(u)$ poate fi caracterizată secvenţial prin: pentru orice $(t_n) \downarrow 0$ şi $(u_n) \to u$*

$$\lim_n e\left(\frac{1}{t_n} F(\overline{x}) + v, \frac{1}{t_n} F(\overline{x} + t_n u_n)\right) = 0,$$

şi prin: pentru orice $(t_n) \downarrow 0$ şi $(u_n) \to u$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$F(\overline{x}) + t_n v \subset F(\overline{x} + t_n u_n) + t_n B(0, \varepsilon).$$

($B(0, \varepsilon)$ este bila deschisă de centru 0 şi rază ε.)

Propunem acum un alt concept inspirat din caracterizarea secvenţială a lui $D^+F(\overline{x})(u)$.

Definiţia 13 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ o multifuncţie şi $\overline{x}, u \in X$. Se numeşte derivata direcţională inferioară a lui F în $\overline{x}$ în direcţia u mulţimea, notată $D^-F(\overline{x})(u)$, a elementelor $v \in Y$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $(t_n) \downarrow 0$, $(u_n) \to u$ şi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,*

$$F(\overline{x}) + t_n v \subset F(\overline{x} + t_n u_n) + t_n B(0, \varepsilon).$$

În continuare, analizăm legăturile conceptelor anterioare cu derivatele direcţionale clasice în sens Hadamard. Fie $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ o funcţie şi domeniul său $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$. Fie $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$ şi $u \in X$. Reamintim că derivata direcţională superioară în sens Hadamard a lui f în $\overline{x}$ în direcţia u este

$$d_+ f(\overline{x}, u) = \limsup_{t \downarrow 0, u' \to u} \frac{f(\overline{x} + tu') - f(\overline{x})}{t},$$

iar derivata direcţională inferioară în sens Hadamard a lui f în $\overline{x}$ în direcţia u este

$$d_-f(\overline{x}, u) = \liminf_{t\downarrow 0, u'\to u} \frac{f(\overline{x}+tu') - f(\overline{x})}{t}.$$

Fie $f : X \to Y$ o funcţie. Multifuncţia epigraf a lui f în raport cu K este $\operatorname{Epi} f : X \rightrightarrows Y$, dată prin

$$\operatorname{Epi} f(x) = f(x) + K,\ \forall x \in X.$$

Propoziţia 14 *Fie* $f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, $\overline{x} \in \operatorname{dom} f$, $u \in X$. *Avem:*
(i) $D^-(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u) = [d_-f(\overline{x}, u), +\infty)$;
(ii) $D^+(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u) = [d_+f(\overline{x}, u), +\infty)$;
(iii) $D^-f(\overline{x})(u) \subset [d_-f(\overline{x}, u), d_+f(\overline{x}, u)]$, *în timp ce* $D^+f(\overline{x})(u) \neq \emptyset$ *implică* $d_-f(\overline{x}, u) = d_+f(\overline{x}, u)$, *caz în care* $D^+f(\overline{x})(u) = \{d_-f(\overline{x}, u)\}$.

Propoziţia 15 *Fie* $f : X \to Y$ *o funcţie (Fréchet) diferenţiabilă şi* $\overline{x}, u \in X$. *Atunci*

$$\nabla f(\overline{x})(u) + K \subset D^+(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u).$$

Dacă, în plus, $K + D_Y(0,1)$ *este închisă atunci*

$$D^+(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u) = \nabla f(\overline{x})(u) + K.$$

Pentru o funcţie cu valori reale $f : X \to \mathbb{R}$, considerăm $K := [0,\infty)$, deci $\operatorname{Epi} f = f + [0,\infty)$. Pentru $x \in X$, $\widehat{\partial} f(x)$ notează subdiferenţiala Fréchet a lui f în x, în timp ce $\widehat{\partial}^+ f(x) = -\widehat{\partial}(-f)(x)$ desemnează mulţimea subgradienţilor Fréchet superiori ai lui f în x. Pentru definiţii şi detalii privind aceste bine-cunoscute obiecte de diferenţiabilitate generalizată poate fi consultată monografia [11]. Menţionăm aici doar că $\widehat{\partial} f(x)$ şi $\widehat{\partial}^+ f(x)$ sunt simultan nevide dacă şi numai dacă f este diferenţiabilă în x.

Propoziţia 16 *Fie* $f : X \to \mathbb{R}$ *o funcţie şi* $\overline{x}, u \in X$. *Atunci*

$$\left\{x^*(u) \mid x^* \in \widehat{\partial}^+ f(\overline{x})\right\} \subset D_{H_-}(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u).$$

Reciproc, dacă X *este finit dimensional şi* $x^* \in X^*$ *satisface* $x^*(u) \in D_{H_-}(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u)$ *pentru orice* u, *atunci* $x^* \in \widehat{\partial}^+ f(\overline{x})$.

Aceste derivate generalizate sunt potrivite pentru a scrie condiţii de optimalitate pentru probleme de optimizare cu mulţimi, aşa cum arată rezultatele de mai jos. Reamintim mai întâi că pentru o mulţime $\emptyset \neq A \subset Y$, mulţimea punctelor de minim slab este

$$\operatorname{WMin}(A, K) := \{a \in A \mid (A - a) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset\}.$$

Propoziţia 17 *Fie* $\overline{x}$ *un* $l-$*slab minim local pentru* F *pe* M *şi* $\operatorname{WMin}(F(\overline{x}), K) \neq \emptyset$. *Atunci*

$$D^+F(\overline{x})(u) \cap -\operatorname{int} K = \emptyset,\ \forall u \in T_B(M, \overline{x}).$$

Observaţia 18 *Propoziţiile 17 şi 16 implică următoarea condiţie necesară de optimalitate pentru probleme de optimizare nenetedă cu restricţii geometrice:*

$$-\widehat{\partial}^+ f(x) \subset (T_B(M, \overline{x}))^-$$

(unde $(T_B(M, \overline{x}))^-$ *notează polara negativă a conului tangent Bouligand la* M *în* $\overline{x}$ *care este desemnat prin* $T_B(M, \overline{x})$*), ceea ce, pentru* X *finit dimensional înseamnă*

$$-\widehat{\partial}^+ f(x) \subset \widehat{N}(M, \overline{x})$$

(unde $\widehat{N}(M, \overline{x})$ *este conul normal Fréchet la* M *în* $\overline{x}$*).*

Propoziţia 19 *Fie* X *finit dimensional. Fie* $\overline{x} \in M$ *astfel încât* $\operatorname{WMin}(F(\overline{x}), K) \neq \emptyset$. *Dacă*

$$0 \notin D^- \operatorname{Epi} F(\overline{x})(T_B(M, \overline{x}) \setminus \{0\}), \tag{2}$$

atunci pentru orice $e \in Y$ *există* $\mu > 0$ *astfel încât* $\overline{x}$ *este* $l-$*slab minim local pentru* $x \rightrightarrows F(x) - \mu\|x - \overline{x}\| e$ *pe* M.

Rezultatul următor arată că, în anumite condiţii, limita unui şir de puncte critice (în sens generalizat) este punct critic. Reamintim că o multifuncţie $F : X \rightrightarrows Y$ se numeşte calmă în $\overline{x} \in X$ dacă există $L > 0$ şi $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $x \in B_X(\overline{x}, \varepsilon)$, are loc

$$F(x) \subset F(\overline{x}) + L\|x - \overline{x}\| D_Y(0,1).$$

Propoziţia 20 *Fie $(x_n) \subset X$ un şir de puncte de $l-$slab minim pentru F pe M. Presupunem că $x_n \to \overline{x} \in X$, $\operatorname{WMin}(F(x_n), K) \neq \emptyset$ pentru orice n şi F este calmă în $\overline{x}$. Atunci*

$$D^+F(\overline{x})(u) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset, \ \forall u \in T_U(M, \overline{x}),$$

unde $T_U(M, \overline{x})$ este conul tangent în sens Ursescu la M în $\overline{x}$.

Mai mult, un rezultat de penalizare în sensul lui Clarke poate fi obţinut de asemenea. Reamintim că, conform [10, Definiţia 3.1], o submulţime nevidă A a lui Y se numeşte $K-$compactă dacă orice acoperire a lui A cu mulţimi de forma $U + K$, unde U este deschisă, admite o subacoperire finită.

Propoziţia 21 *Presupunem că $\overline{x} \in M$, $F(\overline{x})$ este $K-$compactă şi $\overline{x}$ este $l-$slab minim pentru F pe M. Fie $e \in K \setminus \{0\}$ astfel încât următoarea condiţie Lipschitz generalizată are loc: există $L > 0$ astfel încât pentru orice $u \in M$ şi $v \in X$*

$$F(u) + L\|u - v\| e \subset F(v) + K.$$

Atunci $\overline{x}$ este $l-$slab minim pe X (adică fără restricţii) pentru multifuncţia $G : X \rightrightarrows Y$,

$$G(x) = F(x) + L d_M(x) e.$$

Utilizând unele reguli de calcul obţinem un rezultat de optimalitate pentru probleme cu restricţii.

Propoziţia 22 *În ipotezele Propoziţiei 21, pentru orice $u \in X$ avem*

$$\left(D^+(\operatorname{Epi} F)(\overline{x})(u) + L D_{H_-}(\operatorname{Epi}(d(\cdot, M)))(\overline{x})(u) e\right) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset.$$

În particular,

$$\left(D^+(\operatorname{Epi} F)(\overline{x})(u) + (L\|u\| e + K)\right) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset, \ \forall u \in X$$

şi

$$\left(D^+(\operatorname{Epi} F)(\overline{x})(u) + [L\|u\|, \infty) e\right) \cap (-\operatorname{int} K) = \emptyset, \ \forall u \in X.$$

În final, aşa cum în cazul clasic derivatele generalizate conduc la definirea unor tipuri de subgradienţi, urmăm aici aceiaşi paşi pentru a introduce şi studia subdiferenţiale pentru multifuncţii.

Definiţia 23 *Fie $F : X \rightrightarrows Y$ şi $\overline{x} \in X$. Subdiferenţiala Fréchet a lui F în $\overline{x}$ este*

$$\widehat{\partial} F(\overline{x}) = \left\{ T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \lim_{x \to \overline{x}} \frac{e(\operatorname{Epi} F(x), \operatorname{Epi} F(\overline{x}) + T(x - \overline{x}))}{\|x - \overline{x}\|} = 0 \right\}. \tag{3}$$

Echivalent, $T \in \widehat{\partial} F(\overline{x})$ dacă şi numai dacă $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ şi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in B(\overline{x}, \delta) : \operatorname{Epi} F(x) \subset \operatorname{Epi} F(\overline{x}) + T(x - \overline{x}) + \varepsilon \|x - \overline{x}\| B(0,1). \tag{4}$$

Similar, putem defini subdiferenţiala superioară a lui F în $\overline{x}$ după cum urmează:

$$\widehat{\partial}^+ F(\overline{x}) = \left\{ T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \lim_{x \to \overline{x}} \frac{e(\operatorname{Epi} F(\overline{x}) + T(x - \overline{x}), \operatorname{Epi} F(x))}{\|x - \overline{x}\|} = 0 \right\}. \tag{5}$$

Subdiferenţiala inferioară Hadamard a lui F în $\overline{x}$ este

$$\partial_- F(\overline{x}) = \{ T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid T(u) \in D_- \operatorname{Epi} F(\overline{x})(u), \ \forall u \in X \}. \tag{6}$$

Explorăm situaţia funcţiilor diferenţiabile.

Propoziţia 24 *Fie* $f : X \to Y$ *o funcţie Fréchet diferenţiabilă şi* $\overline{x} \in X$.

(i) *Pentru orice* $u \in X$, *avem*

$$\nabla f(\overline{x})(u) - K \subset D_-(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u). \tag{7}$$

Dacă, în plus, $K + D(0,1)$ *este închisă, atunci*

$$D_-(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u) = D_+(\operatorname{Epi} f)(\overline{x})(u) = \nabla f(\overline{x})(u) - K \tag{8}$$

şi, mai mult,

$$\partial_- f(\overline{x}) = \{\nabla f(\overline{x})\}.$$

(ii) *Are loc*

$$\widehat{\partial} f(\overline{x}) = \widehat{\partial}^+ f(\overline{x}) = \{\nabla f(\overline{x})\}.$$

Propoziţia 25 *Fie* $F : X \rightrightarrows Y$ *o multifuncţie şi* $\overline{x} \in X$. *Atunci* $\widehat{\partial} F(\overline{x}) \subset \partial_- F(\overline{x})$, *cu egalitate în cazul în care* X *este finit dimensional.*

Cum este de aşteptat, are loc o regulă de tip Fermat ce se poate dovedi utilă.

Propoziţia 26 *Dacă* $\overline{x}$ *este un punct* $l-$*slab minim pentru* $F : X \rightrightarrows \mathbb{R}$ *şi* $F(\overline{x})$ *este mărginită inferior în raport cu* $[0, +\infty)$, *atunci* $0 \in \widehat{\partial} F(\overline{x}) \subset \partial_- F(\overline{x})$.

În încercarea de a obţine condiţii suficiente de optimalitate se ajunge la rezultatul următor.

Propoziţia 27 *Presupunem că* X *este finit dimensional şi* $\operatorname{WMin}(F(\overline{x}), K) \neq \emptyset$. *Dacă*

$$0 \in \partial_-(y^* \circ F)(\overline{x}) = \widehat{\partial}(y^* \circ F)(\overline{x})$$

pentru o funcţională $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$ *pentru care mulţimea* $y^* \circ F(\overline{x})$ *admite un minim, atunci pentru orice* $\theta > 0$ *şi* $e \in \operatorname{int} K$, $\overline{x}$ *este* $l-$*slab minim pentru* $x \rightrightarrows F(x) + \theta \|x - \overline{x}\| e$.

Bibliografie

[1] M. Burlică, M. Durea, R. Strugariu, *New concepts of directional derivatives for set-valued maps and applications to set optimization*, Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2022.2088368.

[2] M. Durea, E.-A. Florea, D. Maxim, R. Strugariu, *Approximate efficiency in set-valued optimization with variable order*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 6 (2022), 619-640.

[3] M. Durea, R. Strugariu, *Directional derivatives and subdifferentials for set-valued maps applied to set optimization*, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-022-01222-3.

[4] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zălinescu, *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Springer, 2003.

[5] A.H. Hamel, F. Heyde, A. Löhne, B. Rudloff, C. Schrage (eds.), *Set Optimization and Applications – The State of the Art*, Springer, 2015.

[6] M.I. Henig, *A cone separation theorem*, Journal of Optimization Theory and Applications, 36 (1982), 451–455.

[7] B. Jiménez, V. Novo, A. Vílchez, *Characterization of set relations through extensions of the oriented distance*, Mathematical Methods of Operations Research, 91 (2020), 89–115.

[8] A.A. Khan, C. Tammer, C. Zălinescu, *Set-valued Optimization. An Introduction with Applications*, Springer, 2015.

[9] D. Kuroiwa, T. Nuriya, *A generalized embedding vector space in set optimization*, Proceedings of the Forth International Conference on Nonlinear and Convex Analysis, 2006, 297–303.

[10] D.T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer, 1989.

[11] B. S. Mordukhovich, *Variational Analysis and Generalized Differentiation*, Springer, 2006.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu

Rezumat executiv

Activitatea ştiinţifică din cadrul proiectului PN-III-P4-PCE-2021-0690 în perioada 27.05.2022–31.12.2022

Obiectivul etapei s-a intitulat *Analiză variaţională pe conuri,* iar activităţile avute în vedere în cadrul acestui obiectiv au fost:

1. Proprietăţi algebrice şi topologice pentru conuri – documentare
2. Proprietăţi algebrice şi topologice pentru conuri – rezultate intermediare
3. Conuri de dilatare şi separare conică – documentare

A fost prevăzut ca activitatea de cercetare din această etapă să se concretizeze într-un articol ştiinţific publicat într-o revistă situată în cuartilele Q1 sau Q2.

Obiectivul şi activităţile avute în vedere au fost îndeplinite. Am obţinut diverse rezultate ce sunt conţinute în următoarele articole ştiinţifice publicate în reviste matematice importante aflate în cuartilele Q1 sau Q2:

1. **M. Durea**, **E.-A. Florea**, D. Maxim, **R. Strugariu**, *Approximate efficiency in set-valued optimization with variable order*, Journal of Nonlinear and Variational Analysis, 6 (2022), 619-640; FI: 1.683 (Q1), SRI: 0.685.
2. M. Burlică, **M. Durea**, **R. Strugariu**, *New concepts of directional derivatives for set-valued maps and applications to set optimization*, Optimization, DOI: 10.1080/02331934.2022.2088368; FI: 1.203 (Q1), SRI: 1.124 (Q2).
3. **M. Durea**, **R. Strugariu**, *Directional derivatives and subdifferentials for set-valued maps applied to set optimization*, Journal of Global Optimization, DOI: 10.1007/s10898-022-01222-3; FI: 0.977 (Q2); SRI: 1.211 (Q2).

Unele rezultate obţinute de asemenea în cadrul acestui proiect şi care nu sunt încă publicate au fost prezentate la conferinţa internaţională *12th International Conference on Parametric Optimization and Related Topics*, (12–16 Septembrie, 2022, Augsburg, Germania) de către **C. Zălinescu** în prezentarea orală intitulată *On an open problem related to the parametric version of Gale's example in conic linear programming.*

Pentru mai multe detalii, a se vedea pagina web a proiectului la adresa

http://www.math.uaic.ro/~zalinesc/VARACAVO_ro.htm

Prezentăm rezumativ conţinutul articolelor de mai sus.

În articolul [1] considerăm probleme de optimizare vectorială cu ordine variabilă şi investigăm două direcţii de cercetare legate de acestea. Prima direcţie vizează condiţii de stabilitate a punctelor de minim pentru astfel de probleme la perturbarea multifuncţiei obiectiv şi a mulţimilor de restricţii, iar a doua are în vedere studiul unor posibilităţi de a reduce ordinea variabilă la o ordine fixă. Principalele unelte folosite sunt patru tipuri de dilatare conică pe care le studiem în detaliu.

În articolul [2] introducem şi studiem două derivate direcţionale adaptate cazului problemelor de optimizare cu mulţimi. Motivaţia abordării noastre constă în noutatea şi flexibilitatea acestor construcţii pentru studiul problemelor menţionate şi relaţiile obiectelor pe care le definim cu alte obiecte cunoscute de diferenţiabilitate generalizată. Pe baza acestor derivate demonstrăm condiţii de optimalitate pentru probleme fără restricţii pe care apoi le extindem la probleme cu restricţii folosind rezultate de penalizare şi reguli de calcul.

În articolul [3] prezentăm o metodă generală de a defini derivate direcţionale şi subdiferenţiale pentru multifuncţii care generalizează construcţiile corespunzătoare din cazul clasic. Arătăm că aceste obiecte de diferenţiabilitate generalizată au proprietăţi care, pe de o parte, extind netrivial proprietăţile din cazurile deja cunoscute şi, pe de altă parte, sunt utile în studiul $l-$minimalităţii în probleme de optimizare cu mulţimi.

Director de proiect,
prof. dr. Constantin Zălinescu